

THESIS / THÈSE

MASTER EN SCIENCES MATHÉMATIQUES

The jungle universe

MELOT, Laurence

Award date:
2012

[Link to publication](#)

General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal ?

Take down policy

If you believe that this document breaches copyright please contact us providing details, and we will remove access to the work immediately and investigate your claim.



**FACULTES UNIVERSITAIRES NOTRE-DAME DE LA PAIX
NAMUR**

Faculté des Sciences

The Jungle Universe

**Mémoire présenté pour l'obtention
du grade académique de master en « Sciences Mathématiques »**

Laurence MELOT

Juin 2012



**FACULTES UNIVERSITAIRES NOTRE-DAME DE LA PAIX
NAMUR**

Faculté des Sciences

The Jungle Universe

Promoteur : André Füzfa

Maître de stage : Jérôme Perez

**Mémoire présenté pour l'obtention
du grade académique de master en « Sciences Mathématiques »**

Laurence MELOT

Juin 2012

Résumé

La cosmologie est une branche de l'astrophysique qui étudie l'Univers dans son ensemble. Les équations de Friedmann-Lemaître se déduisent des équations d'Einstein et peuvent, sous certaines hypothèses, s'écrire sous la forme d'un système proie-prédateur. Ce formalisme permet une étude simplifiée des équilibres du système. Insérer un couplage dans les équations des cosmologies écrites en système proie-prédateur va permettre la mise en évidence d'un nouvel équilibre dans lequel cohabitent matière et énergie noires.

Ce nouveau point d'équilibre mis en évidence par la théorie proie-prédateur ne peut cependant pas être justifié analytiquement dans ce formalisme. Un hamiltonien correspondant aux équations de Friedmann-Lemaître est alors recherché afin de remédier à ce problème.

Abstract

Cosmology is the part of astrophysics that deals with the nature of the Universe as a whole. The Friedmann-Lemaître's equations are deduced from the Einstein's equations and can be written, under some assumptions, as a predator-prey system. This formalism leads to a simplified study of the equilibrium. Introducing a coupling between the dark matter and the dark energy in the predator-prey system will allow the identification of a new equilibrium in which dark matter and dark energy coexist.

This new equilibrium highlighted by the predator-prey theory can not be justified analytically. In order to avoid this problem, the last part of this work focuses on finding an hamiltonian formulation of the Friedmann-Lemaître's equations.

Remerciements

En préambule à ce mémoire, je souhaite remercier sincèrement les personnes qui m'ont apporté leur aide et qui ont contribué à l'élaboration de ce travail ainsi qu'à la réussite de ces cinq années d'études.

Je tiens à remercier particulièrement Monsieur Füzfa, qui, en tant que promoteur de mémoire, s'est montré à l'écoute et disponible tout au long de la réalisation de ce travail. Merci également pour le temps qu'il a bien voulu me consacrer, ce mémoire n'aurait pu être réalisé sans son aide.

Mes remerciements s'adressent également à Monsieur Perez qui m'a accompagnée tout au long de mon stage à l'ENSTA Paris tech. Merci pour son temps précieux qu'il ne m'a jamais refusé et ses nombreux encouragements tout au long de ce travail.

Je n'oublie pas ma famille pour sa contribution, son soutien et sa patience. Un merci particulier à Maman et Sophie qui ont courageusement lu et corrigé ce mémoire.

Enfin, merci à tous mes proches et amis, qui m'ont toujours soutenue et encouragée au cours de la réalisation de ce mémoire et de ces cinq années d'études. Merci à tous et à toutes.

Table des matières

0	Introduction	1
1	Formulation du problème	2
1.1	Notions de géométrie différentielle	3
1.1.1	Relativité générale	3
1.1.2	Géométrie riemannienne	7
1.1.3	Courbure, tenseur et connexion métriques	10
1.2	Introduction à la cosmologie	12
1.2.1	Modèle standard du Big Bang	12
1.2.2	La constante cosmologique Λ	15
1.2.3	Un sujet controversé	16
1.2.4	Preuves observationnelles de l'existence de l'énergie noire	17
1.3	Equations de Friedmann-Lemaître	20
1.3.1	Éléments de la cosmologie de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker	20
1.3.2	Équations du mouvement du fluide cosmologique	25
2	Modèles d'interactions entre espèces	28
2.1	Dynamique des populations et équations de Lotka-Volterra	29
2.1.1	Croissance exponentielle et logistique	29
2.1.2	Equations de Lotka-Volterra pour un système proie-prédateur	30
2.1.3	Equations de Lotka-Volterra pour deux espèces en compétition	35
2.2	Dynamique de l'Univers homogène et isotrope	37
2.2.1	Equations de Friedmann-Lemaître en fonction des paramètres de densité	38
2.2.2	Evolution du paramètre de densité $\rho(t)$	40
2.2.3	Etats d'équilibre de l'Univers de Friedmann-Lemaître	41
2.2.4	Etude approfondie de la dynamique	45
2.3	Généralisation du modèle à plus de deux espèces	50
2.4	L'Univers comme un système proie-prédateur : interprétation	53
3	Mise en évidence d'un nouvel Univers et approches envisagées	54
3.1	Insertion d'un couplage dans le modèle standard	55
3.1.1	Analyse des équilibres du système	56
3.2	Formulation hamiltonienne du problème : pistes envisagées	59
3.2.1	Rappel du formalisme hamiltonien	59
3.2.2	Première approche : système sous forme Lotka-Volterra	60

3.2.3	Seconde approche : hamiltonien des équations de Friedmann-Lemaître	61
3.2.4	Troisième approche : lagrangien des équations de Friedmann-Lemaître	62
3.3	Formulation hamiltonienne des équations de Friedmann-Lemaître	66
3.3.1	Détermination d'un lagrangien	66
3.3.2	Détermination d'un hamiltonien	68
4	Conclusion et perspectives	69
	Bibliographie	71
	Annexe	73

Chapitre 0

Introduction

Ce mémoire est réalisé dans le cadre de la cosmologie, l'étude de l'Univers dans son ensemble. Dans le premier chapitre nous allons découvrir le chemin poursuivi pour passer de la relativité restreinte à la relativité générale. Nous verrons alors comment la gravité correspond à la courbure de l'espace-temps due à la présence de matière. Nous développerons ensuite le modèle standard du Big-Bang et introduirons la constante cosmologique, constante dont le statut fût longuement controversé (et l'est toujours pour certains). Nous déduirons finalement dans ce premier chapitre les équations de Friedmann-Lemaître qui décrivent l'évolution de l'Univers.

Dans un second temps, nous verrons que, sous certaines hypothèses, les équations de Friedmann-Lemaître peuvent s'écrire sous la forme d'un système proie-prédateur. Nous analyserons, dans le deuxième chapitre, la théorie de ces systèmes proie-prédateur. Nous regarderons tout d'abord les équilibres d'un tel système dans le cas général. Pour terminer ce chapitre nous analyserons le système proie-prédateur appliqué à l'Univers, nous retrouverons alors les équilibres "classiques" du modèle standard (Univers de Milne, de de Sitter et d'Einstein-de Sitter). C'est ici que le titre de ce travail prend son sens. En comparant l'Univers à un système proie-prédateur, les fluides cosmologiques jouent le rôle d'espèces en compétition que l'on peut comparer à une jungle.

En utilisant la version proie-prédateur des équations de l'Univers, nous pouvons facilement insérer un couplage entre différents fluides. Dans le dernier chapitre, nous introduirons un couplage entre la matière noire et l'énergie noire. Nous pourrions alors constater que cela implique l'existence d'un nouvel équilibre, équilibre qui permet la coexistence de ces deux fluides considérés. Ce nouveau phénomène s'observe graphiquement mais ne peut être justifié dans ce formalisme. Afin de remédier à ce problème, nous consacrerons la dernière partie de ce travail à la recherche d'une formulation hamiltonienne des équations de Friedmann-Lemaître.

Chapitre 1

Formulation du problème

Dans ce chapitre, nous allons tout d'abord développer la théorie de la relativité générale. Nous poserons ensuite les notions de géométrie différentielle utiles à ce travail. Dans un second temps, nous passerons à la cosmologie. Après avoir défini ce concept, nous explorerons le modèle standard du Big Bang, ses avantages et ses limites. Nous regarderons également de plus près le statut de la constante cosmologique et analyserons les preuves de l'existence de l'énergie noire. La dernière section de ce chapitre sera consacrée au calcul des équations de Friedmann-Lemaître.

1.1 Notions de géométrie différentielle

1.1.1 Relativité générale

La cosmologie cherche à décrire l'évolution de l'Univers, de sa formation à son état actuel. En mécanique newtonienne, la matière n'influence pas le comportement de l'Univers, cette théorie ne permet donc pas la description de l'Univers tel que nous le connaissons aujourd'hui, il faut faire appel à la relativité générale qui unifie l'espace et le temps pour y parvenir. Analysons le chemin poursuivi pour arriver à cette conclusion.

Mécanique newtonienne

En mécanique newtonienne, un point P est repéré de manière unique dans l'espace par trois coordonnées spatiales (x, y, z) dans un repère S et une coordonnée temporelle t donnée par une horloge au repos dans S .

Il est cependant possible de vouloir repérer ce point dans un autre repère S' . Par facilité, on va choisir des repères inertiels, repères dans lesquels la première loi de Newton (une particule libre est au repos ou se déplace à vitesse constante) est vérifiée. Si S et S' sont deux référentiels inertiels alors on obtient S' à partir de S en effectuant une translation, une rotation et/ou un mouvement à vitesse constante. On peut se contenter de la configuration standard (figure 1.1), S' se déplaçant à vitesse constante v le long de l'axe x de S pour décrire deux référentiels inertiels (les origines des deux repères coïncident en $t = 0$).

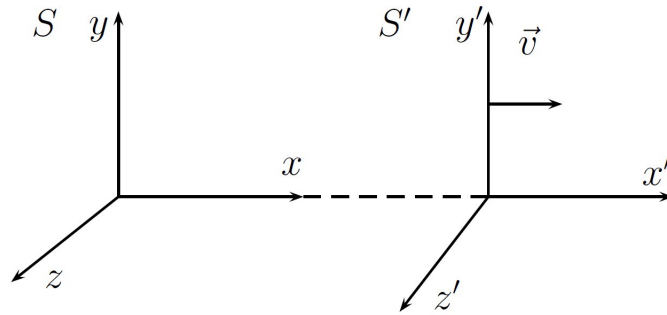


FIGURE 1.1 – Deux repères inertiels, S et S' , en configuration standard.

De plus, en mécanique newtonienne, le temps est absolu ; il est le même pour tout observateur. Si les primes ' représentent les coordonnées dans S' les coordonnées sont alors reliées par les transformations de Galilée :

$$\begin{cases} t' = t, \\ x' = x - vt, \\ y' = y, \\ z' = z. \end{cases} \quad (1.1)$$

Si nous considérons à présent deux évènements $A := (t_A, x_A, y_A, z_A)$ et $B := (t_B, x_B, y_B, z_B)$ on peut montrer que

$$\begin{aligned} \Delta t^2 &:= (t_B - t_A)^2, \\ \Delta r^2 &:= (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2 \\ &= \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 \end{aligned}$$

sont invariants sous transformation de Galilée. Dès lors, Δt^2 et Δr^2 vont décrire la géométrie de l'espace et du temps en mécanique newtonienne, l'espace et le temps étant séparés. Cette géométrie est représentée par

$$\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}.$$

Relativité restreinte

En relativité restreinte on suppose que les lois physiques sont les mêmes pour tout observateur inertiel. Par conséquent, la vitesse de la lumière, c , est constante. Supposons alors qu'au temps $t = 0$, un signal lumineux soit émis de l'origine des deux repères (les origines coïncident en $t = 0$), après un temps t , on peut situer le signal dans les deux repères :

$$c^2 t^2 = x^2 + y^2 + z^2, \text{ dans le repère } S \text{ et} \quad (1.2)$$

$$c'^2 t'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 \text{ dans le repère } S'$$

$$\Leftrightarrow c^2 t^2 = (x - vt)^2 + y^2 + z^2. \quad (1.3)$$

Cette dernière équation (1.3) est obtenue en tenant compte que $c = c'$, $t = t'$ et en utilisant les transformations de Galilée (1.1). La lumière devrait se trouver en deux endroits différents au même moment. Comme ceci est impossible, la relativité restreinte abandonne l'idée du temps absolu. En repartant de nos deux équations précédentes (1.2) et (1.3), on a alors :

$$\begin{aligned} c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2 &= c^2 t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 = 0 \\ \Leftrightarrow \Delta s^2 &= \Delta s'^2 = 0 \end{aligned}$$

avec $\Delta s^2 := c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2$.

Lorentz montre que ses transformations spéciales selon OX sont des transformations linéaires qui permettent la conservation de Δs^2 . Celles-ci sont données par :

$$\begin{cases} ct' = \gamma(ct - \beta x), \\ x' = \gamma(x - \beta ct), \\ y' = y, \\ z' = z \end{cases} \quad (1.4)$$

avec $\beta := \frac{v}{c}$ et $\gamma := \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$. On parle ici de transformations spéciales car les transformations de Lorentz générales sont des composées de transformations spéciales avec des isométries spatiales et des réflexions du temps [13].

Les transformations de Lorentz mélangent l'espace et le temps. Si l'on considère de nouveau les deux événements A et B décrits précédemment, on peut montrer que l'intervalle entre ces deux événements,

$$\Delta s^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2 \quad (1.5)$$

est invariant sous transformation de Lorentz. Nous allons dès lors considérer l'espace et le temps comme étant unis et travailler dans l'espace-temps de Minkowski dont la géométrie est caractérisée par (1.5).

Si nous considérons nos deux événements comme étant infinitésimalement proches, $A = (t, x, y, z)$ et $B = (t + dt, x + dx, y + dy, z + dz)$, alors la distance entre ces événements est donnée par

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2. \quad (1.6)$$

Cet intervalle se nomme élément de ligne de l'espace-temps de Minkowski et est caractérisé par son signe :

$$\begin{aligned} ds^2 > 0 & \text{ correspond à un intervalle de genre temps,} \\ ds^2 = 0 & \text{ correspond à un intervalle de genre lumière,} \\ ds^2 < 0 & \text{ correspond à un intervalle de genre espace.} \end{aligned}$$

Suite à l'unification de l'espace et du temps, il faut à présent parler d'événements ; tout phénomène se produit en un lieu précis et à un moment donné. La relativité restreinte parle de référentiels inertiels mais ne dit rien des référentiels accélérés, c'est pour cela qu'Einstein introduit la relativité générale. Celle-ci va également permettre de caractériser la gravitation.

Relativité générale

Pour introduire les référentiels accélérés, Einstein procède à une expérience de pensée. Il imagine deux personnes enfermées dans deux cabines identiques. La première cabine se trouve au repos sur la terre alors que la seconde est accrochée à une fusée en accélération dans l'espace.

Imaginons que ces deux personnes laissent tomber une pomme dans leur cabine. La situation est alors la suivante, pour la première personne, la pomme tombe, accélérée sous l'effet de la gravité. Si la seconde cabine n'est pas soumise à la gravité terrestre, elle est cependant accélérée vers le haut, la pomme ne suit pas le mouvement de la cabine et notre observateur voit sa pomme accélérer vers le bas de la cabine. Si nous changeons à présent les deux personnes de cabines, ils se voient incapables de déterminer où ils se trouvent. La gravitation est équivalente à un référentiel accéléré. C'est le principe d'équivalence.

La relativité générale repose donc sur deux principes :

- le principe de relativité générale : *les lois de la physique sont identiques dans tout référentiel (inertiel ou non),*
- le principe d'équivalence d'Einstein : *localement, la gravitation est équivalente à une accélération du référentiel pour n'importe quel phénomène physique.*

Einstein propose également une nouvelle vision de la gravitation. Si pour Newton, la terre tourne autour du soleil car celui-ci exerce une force gravitationnelle sur notre planète, l'idée d'Einstein est différente. Il considère que la terre tourne autour du soleil car ce dernier déforme l'espace autour de lui. En relativité générale, on peut comparer l'espace à une sorte de tissu déformable, si l'on dépose une bille sur le tissu, on crée une dépression. Une seconde bille qui passerait près de la première se verrait alors attirée dans la cavité formée par cette première bille comme on peut le voir sur la figure suivante. La trajectoire est dictée par la forme de l'espace, la gravitation est dès lors considérée comme la manifestation de la courbure de l'espace-temps.

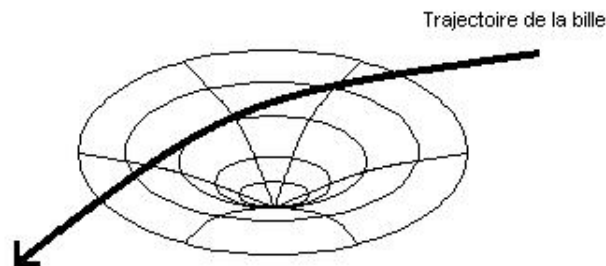


FIGURE 1.2 – [20] Gravité en relativité générale

Pour décrire la courbure de l'espace-temps, nous allons développer la théorie des variétés riemanniennes. Nous verrons comment la métrique $g_{\mu\nu}$ caractérise entièrement la gravité. Cette partie est basée sur le cours de géométrie différentielle riemannienne [3].

1.1.2 Géométrie riemannienne

Nous allons dans cette section définir les variétés riemanniennes. Pour ce faire, nous partons d'un espace topologique sur lequel nous définissons une structure différentielle. Nous obtenons alors une variété. Sur cette variété, nous souhaitons définir la notion de dérivée, qui sera ici la connexion. Nous irons plus loin en définissant la connexion affine et finalement la métrique qui nous amènera à la notion de variété riemannienne.

Un espace topologique sur lequel il est possible de définir des fonctions différentiables est une variété, notée V . Sur une variété, il est nécessaire de redéfinir le concept de vecteur : celui-ci ne peut plus être vu comme une flèche reliant son origine à un point quelconque de l'espace. En effet, il n'est pas possible de relier deux points éloignés sur une sphère par une ligne droite. Un vecteur est dès lors défini comme un vecteur tangent, X , à une courbe $c :]a, b[\subset \mathbb{R} \rightarrow V$ de la variété :

$$X := X^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}$$

où nous avons utilisé la convention d'Einstein selon laquelle un indice répété en dessous et au-dessus dans une expression équivaut à une sommation sur cet indice.

Le vecteur tangent s'applique sur un champ scalaire $f : V \rightarrow \mathbb{R}$:

$$X[f] \equiv X^\mu \frac{\partial f}{\partial x^\mu} = \frac{df(c(t))}{dt} \Big|_{t=0}$$

où t est le paramètre de la courbe, le membre de gauche de l'équation représente la dérivée directionnelle et celui de droite la dérivée totale.

L'ensemble des vecteurs tangents de V à un point P est l'espace tangent de V au point P et se note $T_P(V)$. Comme cet espace est vectoriel, on peut définir des formes linéaires $\omega : T_P(V) \rightarrow \mathbb{R}$. Ces formes linéaires constituent l'espace dual $T_P^*(V)$ de $T_P(V)$.

Le but de notre analyse est de trouver les bons objets mathématiques à utiliser sur une variété. On dira des objets géométriques existant indépendamment du choix de coordonnées fait pour les étudier qu'ils sont tensoriels. Les tenseurs sont nos objets recherchés et se définissent comme suit : un tenseur de type (p, q) est une application multilinéaire qui à p éléments de $T_P^*(V)$ et q éléments de $T_P(V)$ fait correspondre un nombre réel. Un objet mathématique est un tenseur s'il vérifie le théorème suivant (loi de transformation des tenseurs) :

Théorème 1 Soit un tenseur de type (p, q) $T : \otimes^p T_P^*(V) \otimes^q T_P(V) \rightarrow \mathbb{R}$ associé au point $P \in U_i \cap U_j$ où U_i et U_j sont des ouverts de V et les coordonnées $x = \{x^\mu(P)\}$ et $y = \{y^\mu(P)\}$ associées aux transformations de coordonnées φ_i et φ_j respectivement. Alors les composantes du tenseur T se transforment comme

$$\tilde{T}_{\nu_1 \dots \nu_p}^{\mu_1 \dots \mu_p} = \frac{\partial y^{\mu_1}}{\partial x^{\rho_1}} \dots \frac{\partial y^{\mu_p}}{\partial x^{\rho_p}} \frac{\partial x^{\sigma_1}}{\partial y^{\nu_1}} \dots \frac{\partial x^{\sigma_q}}{\partial y^{\nu_q}} T_{\sigma_1 \dots \sigma_q}^{\rho_1 \dots \rho_p}$$

lors du changement de coordonnées de x vers y .

Un concept supplémentaire, nécessaire à l'étude des variétés, est la notion de dérivée sur une variété. Rappelons la définition de la dérivée d'un champ vectoriel par rapport à x^ν :

$$\frac{\partial V^\mu}{\partial x^\nu} = \lim_{\Delta x^\nu \rightarrow 0} \frac{V^\mu(\dots, x^\nu + \Delta x^\nu, \dots) - V^\mu(\dots, x^\nu, \dots)}{\Delta x^\nu}$$

Dans cette définition, on fait appel à l'évaluation du champ en deux points différents : x et $x + \Delta x$. Comme on ne peut comparer deux vecteurs associés à des points différents, nous allons introduire le transport parallèle.

Notons $\tilde{V}|_{x+\Delta x}$ le vecteur $V|_x$ transporté de x vers $x + \Delta x$. Nous allons définir le transport parallèle en imposant que celui-ci soit infinitésimal et linéaire, ce qui se traduit par les deux conditions suivantes :

$$\tilde{V}^\mu(x + \Delta x) - V^\mu(x) \sim \Delta x, \text{ où } \sim \text{ signifie "proche de" } \quad (1.7)$$

$$\widetilde{(V^\mu + W^\mu)}(x + \Delta x) = \tilde{V}^\mu(x + \Delta x) + \tilde{W}^\mu(x + \Delta x). \quad (1.8)$$

Introduisons les coefficients de connexion afin de pouvoir satisfaire ces deux hypothèses.

Définition 1 Soit une carte (U, φ) qui à un point P associe la coordonnée $x = \{x^\mu\} = \varphi(P)$. Alors les coefficients de connexion $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ sont définis par

$$\nabla_\mu e_\nu \equiv \nabla_{e_\mu} e_\nu = \Gamma_{\mu\nu}^\lambda$$

avec $e_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}$ la base naturelle de $T_P(V)$.

Ces coefficients déterminent la variation des vecteurs de base des espaces tangents lorsque ceux-ci sont transportés parallèlement sur la variété.

Nous pouvons alors imposer la condition suivante afin de satisfaire les conditions du transport parallèle (1.7) et (1.8) :

$$\tilde{V}^\mu(x + \Delta x) = V^\mu(x) - V^\lambda(x) \Gamma_{\nu\lambda}^\mu(x) \Delta x^\nu.$$

En effet :

$$\begin{aligned} \tilde{V}^\mu(x + \Delta x) - V^\mu(x) &= V^\mu(x) - V^\lambda(x) \Gamma_{\nu\lambda}^\mu(x) \Delta x^\nu - V^\mu(x) \\ &= -V^\lambda(x) \Gamma_{\nu\lambda}^\mu(x) \Delta x^\nu \\ &\sim -\Delta x \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \widetilde{(V^\mu + W^\mu)}(x + \Delta x) &= \widetilde{(V + W)}^\mu(x + \Delta x) - (V + W)^\lambda(x) \Gamma_{\nu\lambda}^\mu(x) \Delta x \\ &= \tilde{V}^\mu(x + \Delta x) + \tilde{W}^\mu(x + \Delta x). \end{aligned}$$

On peut alors définir $\nabla_\nu V$, la dérivée covariante de V par rapport à x^ν par

$$\nabla_\nu V = \lim_{\Delta x^\nu \rightarrow 0} \frac{V^\mu(x + \Delta x) - \tilde{V}^\mu(x + \Delta x)}{\Delta x^\nu} \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{\partial V^\mu}{\partial x^\nu} + V^\lambda \Gamma_{\nu\lambda}^\mu \right) \frac{\partial}{\partial x^\mu}$$

Les $\Gamma_{\nu\lambda}^\mu$ dépendent de la construction du transport parallèle. Si les coefficients sont symétriques sur les indices inférieurs (covariants) et conservent la norme, alors la connexion est une connexion de Levi-Civita. Une variété munie d'une telle connexion est une variété métrique ou riemannienne.

Avant de définir une connexion métrique introduisons la connexion affine.

Définition 2 Une connexion affine est une application ∇ de la forme

$$\nabla : \chi \times \chi \rightarrow \chi : (X, Y) \rightarrow \nabla_X Y$$

où χ est l'ensemble des champs vectoriels et qui satisfait aux conditions suivantes :

$$\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z,$$

$$\nabla_{(X+Y)} Z = \nabla_X Z + \nabla_Y Z,$$

$$\nabla_{(fX)} Y = X f \nabla_X Y,$$

$$\nabla_X(fY) = X[f]Y + f \nabla_X Y$$

où f est un champ scalaire et X, Y, Z sont des champs vectoriels.

1.1.3 Courbure, tenseur et connexion métriques

On peut vérifier que les coefficients de connexion $\Gamma_{\nu\lambda}^\mu$ ne sont pas les composantes d'un tenseur [3], on ne peut dès lors pas les utiliser pour caractériser la courbure d'une variété. En effet, pour satisfaire le principe de relativité générale, la courbure d'une variété doit être une caractéristique intrinsèque et ne peut donc dépendre du choix de coordonnées. Nous allons donc utiliser des combinaisons des coefficients de connexion pour construire des systèmes tensoriels qui décriront cette courbure.

Le tenseur de courbure de Riemann est donné par

$$R : \chi(V) \times \chi(V) \times \chi(V) \rightarrow \chi(V) :$$

$$R(X, Y, Z) = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z,$$

avec $[X, Y] = XY - YX$. Le dernier terme qui apparait dans la définition de la courbure représente la torsion, nous ne développons pas cette notion car, en relativité générale, la torsion est nulle.

Il nous reste à doter notre variété d'un produit scalaire et d'une distance. La généralisation du produit scalaire sur une variété est le tenseur métrique introduit dans la section 1.1.1.

Définition 3 Soit M une variété différentiable. Une métrique pseudo-riemannienne g sur M (ou tenseur métrique) est un champ de tenseurs qui vérifie deux conditions :

- g est symétrique : $g_P(U, V) = g_P(V, U) \forall U, V \in \chi(M)$
- et si $g_P(U, V) = 0 \forall U \in T_P(M)$ alors $V = 0$.

La métrique sert également à définir un déplacement infinitésimal entre deux points d'une variété. Si on prend un déplacement infinitésimal

$$X^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \equiv dx^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}$$

alors

$$\begin{aligned} ds^2 &= g(dx^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}, dx^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu}), \\ &= dx^\mu dx^\nu g(\frac{\partial}{\partial x^\mu}, \frac{\partial}{\partial x^\nu}), \\ &= g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \end{aligned}$$

Nous dirons de plus qu'une connexion affine, ∇ , est une connexion métrique si la relation suivante est vérifiée :

$$\nabla_\lambda g_{\mu\nu} = 0. \quad (1.9)$$

A la base de la relativité générale, on trouve un cas particulier de connexions métriques : la connexion de Levi-Civita. Cette connexion est la seule connexion symétrique existant sur une variété pseudo-riemannienne et compatible avec la métrique g . Les coefficients d'une telle connexion sont donnés par

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2}g^{\lambda\kappa}(\partial_\mu g_{\nu\kappa} + \partial_\nu g_{\mu\kappa} - \partial_\kappa g_{\mu\nu}) \quad (1.10)$$

et correspondent aux symboles de Christoffel $\left\{ \begin{smallmatrix} \lambda \\ \mu\nu \end{smallmatrix} \right\}$.

Nous pouvons également exprimer les composantes du tenseur de courbure de Riemann :

$$R^\kappa_{\lambda\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma^\kappa_{\nu\lambda} - \partial_\nu \Gamma^\kappa_{\mu\lambda} + \Gamma^\eta_{\nu\lambda} \Gamma^\kappa_{\mu\eta} - \Gamma^\eta_{\mu\lambda} \Gamma^\kappa_{\nu\eta}. \quad (1.11)$$

A partir du tenseur de Riemann (1.11), on définit le tenseur de Ricci

$$R_{\mu\nu} := R^\lambda_{\mu\lambda\nu},$$

contraction du tenseur de Riemann.

On a envisagé la gravitation comme propriété géométrique de l'espace-temps avec $g_{\mu\nu}$ **pour seul champ gravitationnel** : c'est le principe d'équivalence fort. La dynamique de l'Univers est alors décrite par l'équation d'Einstein :

$$R_{\mu\nu} - \frac{R}{2}g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu} \quad (1.12)$$

où $\kappa = \frac{8\pi G}{c^4}$ et G est la constante de Newton. Le membre de gauche de cette équation correspond au tenseur d'Einstein et se note $G_{\mu\nu}$. L'énergie-impulsion de la matière est considérée comme la source de la courbure de l'espace-temps et $T_{\mu\nu}$ représente son expression relativiste. Les équations d'Einstein sont issues d'un principe variationnel sur le lagrangien d'Einstein Hilbert. Cette approche lagrangienne va nous poser problème lors du développement d'une théorie hamiltonienne dans le dernier chapitre.

Les notions de géométrie étant posées, nous pouvons passer à la cosmologie.

1.2 Introduction à la cosmologie

“La cosmologie est la branche de l’astronomie qui étudie la structure et l’évolution de l’Univers considéré dans son ensemble” [1]. Dans cette introduction, nous allons tout d’abord développer le modèle standard du Big Bang. Nous nous intéresserons ensuite aux preuves de l’existence de l’énergie noire, et à l’importance de la constante cosmologique Λ .

1.2.1 Modèle standard du Big Bang

La description du modèle expliqué ci-après s’inspire de la thèse de A. Füzfa [2].

C’est en 1916 qu’Einstein applique la théorie de la relativité générale à l’espace-temps dans son ensemble et développe ainsi la cosmologie. Pour ce faire, Einstein se base sur une hypothèse simplificatrice : le principe cosmologique parfait. Les équations décrivant l’Univers (équations du champ gravitationnel) étant très complexes, on ne peut les résoudre sans simplification. Les principales hypothèses retenues concernent la symétrie de l’espace-temps et vont permettre à Einstein de trouver une solution aux équations du champ.

Le principe cosmologique parfait repose sur deux postulats :

1. à grande échelle, l’Univers peut être considéré comme isotrope. L’isotropie signifie que la direction choisie pour réaliser l’étude de propriétés cosmologiques n’a aucune influence sur ces propriétés.
2. la position spatiale et l’époque du cosmologiste n’influent pas sur les caractéristiques du cosmos.

En regroupant ces deux postulats, on obtient le principe d’homogénéité de l’Univers : la matière est répartie uniformément dans le cosmos. De plus, Einstein souhaite décrire un Univers statique et homogène. Sous ces hypothèses, Einstein remarque que l’équation de Poisson sous sa forme de base

$$\Delta\Psi(\vec{r}, t) = 4\pi G\rho(\vec{r}, t)$$

(avec Ψ le champ gravitationnel et ρ la densité) impliquerait un effondrement de l’Univers. En effet, considéré un Univers homogène correspond à une densité d’énergie constante ($\rho(\vec{r}, t) = \rho$). Or on peut utiliser le produit de convolution pour exprimer le potentiel gravitationnel [11]

$$\begin{aligned}\Psi(\vec{r}, t) &= -4\pi G \rho * \frac{1}{|\vec{r}|} \\ &= g_{\Delta} * \rho\end{aligned}$$

où $g_\Delta := -4\pi G \frac{1}{|\vec{r}|}$ est la fonction de Green¹ de l'opérateur Δ dans \mathbb{R}^3 .

Si l'on considère l'Univers comme une sphère de rayon R , alors, en se plaçant à l'intérieur de cette sphère ($r < R$), la solution est donnée par [11]

$$\Psi(\vec{r}, t) \sim kr^2$$

Le principe d'instabilité gravitationnelle [11], (ou instabilité de Jeans) montre alors que dans cette situation, lorsque r dépasse une certaine valeur critique, la sphère considérée s'effondre. D'où l'effondrement de l'Univers prédit par Einstein.

Pour éviter ce problème, Einstein décide de remplacer le laplacien par l'opérateur de Helmholtz dont la fonction de Green, g_H , est :

$$g_\Delta \longrightarrow g_H := \frac{e^{ik|\vec{r}|}}{4\pi|\vec{r}|}.$$

Si $k = i\sqrt{\Lambda}$, alors apparaît une exponentielle décroissante qui permet d'éviter l'effondrement à grande distance, **et c'est ici que la constante cosmologique intervient pour la première fois**. De ce fait, l'équation du champ gravitationnel devient, en mécanique classique,

$$\begin{aligned} \Psi(\vec{r}, t) &= g_H * \rho \\ &= -G \frac{e^{-\Lambda|\vec{r}|}}{|\vec{r}|} * \rho. \\ \Psi(\vec{r}, t) &\sim \frac{e^{-\Lambda|\vec{r}|}}{|\vec{r}|} \end{aligned}$$

L'équation de Poisson est alors remplacée par l'équation de Helmholtz

$$\Delta\Psi - \Lambda\Psi = 4\pi G\rho.$$

Einstein a depuis longtemps compris l'équivalence entre le champ gravitationnel Ψ et la métrique $g_{\mu\nu}$. De plus, en champ faible, ses équations correspondent à l'équation de Poisson. Donc si l'on veut dériver l'équation d'Helmholtz, il faut ajouter un terme ($\Lambda g_{\mu\nu}$) aux équations d'Einstein. Celles-ci deviennent alors

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}. \quad (1.13)$$

1. La fonction de Green est l'inverse de convolution d'un opérateur. Sur \mathbb{R}^3 , la fonction de Green d'un opérateur \mathcal{A} correspond à toute fonction $g_{\mathcal{A}}$ telle que $\mathcal{A}g_{\mathcal{A}} = \delta$ (δ est la fonction de Dirac). Ainsi, la solution du problème $\mathcal{A}f = h$ s'écrit $f = h * g_{\mathcal{A}}$ car $\mathcal{A}f = \mathcal{A}(h * g_{\mathcal{A}}) = h * \mathcal{A}g_{\mathcal{A}} = h * \delta = h$.

Einstein pensait introduire une coupure exponentielle mais il se trompe de signe dans l'équation de Poisson, en fait l'équation (1.13) est équivalente à

$$\Delta\Psi + \Lambda\Phi = 4\pi G\rho$$

où Λ joue le rôle d'une force répulsive. Cette force expliquera plus tard l'expansion de l'Univers.

A cette époque, Einstein pense décrire un Univers homogène, statique et fini. Or les observations vont mettre à jour le mouvement de fuite des galaxies, le modèle n'est plus valide.

Il faut dès lors modifier le principe cosmologique parfait afin de coller aux observations. Nous allons supprimer l'hypothèse de similitude temporelle pour obtenir le principe cosmologique qui suppose que

l'Univers est isotrope et spatialement homogène à grande échelle. (P.C.)

Trois types de géométries sont dès lors possibles pour décrire l'espace : la géométrie elliptique correspondant à un cosmos fermé, la géométrie hyperbolique décrivant un Univers ouvert et l'euclidienne pour un Univers plat. La figure 1.3 représente l'évolution du facteur d'échelle² de l'Univers, $a(t)$ en fonction de ces trois types d'espaces envisageables (avec $\Lambda = 0$). Les trois modèles présentent une singularité en $t = 0$ correspondant au Big Bang.

2. Le facteur d'échelle $a(t)$ est introduit pour définir un système de coordonnées permettant de décrire un Univers non statique. Considérons 2 points de l'espace séparés d'une distance d , dans notre Univers en expansion, d croît avec le temps ($d = d(t)$) même si les 2 points ne sont pas en mouvement l'un par rapport à l'autre. Les coordonnées comobiles permettent d'éviter cette situation. La distance comobile r est donc une caractérisation de la distance entre 2 points lorsque l'on ignore l'expansion de l'Univers. On a $d(t) = a(t)r$.

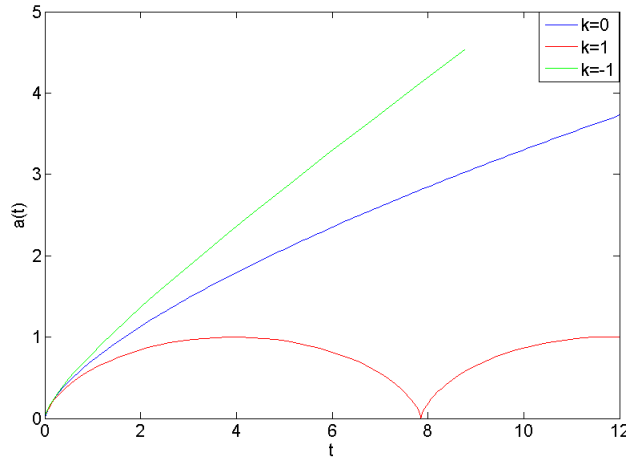


FIGURE 1.3 – Modèles cosmologiques en présence de matière de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker ($\Lambda = 0$). Modèle fermé : $k = +1$, modèle ouvert : $k = -1$ et modèle plat : $k = 0$.

1.2.2 La constante cosmologique Λ

Comme précisé précédemment, Einstein introduit en 1917 [5] la constante cosmologique dans ses équations afin d'éviter un effondrement de l'Univers. Il décrit ainsi un Univers statique et spatialement homogène. On peut voir la constante cosmologique comme un terme antigravifique qui s'oppose à l'effet attracteur de la matière présente dans l'espace.

Une dizaine d'années plus tard, l'astronome Hubble met en évidence une relation linéaire entre la distance des galaxies et leur vitesse d'éloignement (la pente de cette droite définira la constante de Hubble H). Ce mouvement de fuite des galaxies confirme l'idée de Friedmann et Lemaître d'un Univers dynamique et contredit l'hypothèse d'un Univers statique qui avait amené Einstein à introduire Λ . Celui-ci supprime alors la constante cosmologique de ses équations.

A partir de 1998 [7], les observations montrent que l'expansion de l'Univers s'accélère. La constante cosmologique refait alors son apparition dans les équations d'Einstein en tant que matière antigravifique permettant cette accélération. Les équations d'Einstein, avec constante cosmologique, sont alors :

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}$$

avec $\kappa = \frac{8\pi G}{c^4}$, ou de manière équivalente

$$R_{\mu\nu} = \kappa(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Tg_{\mu\nu}) + \Lambda g_{\mu\nu}. \quad (1.14)$$

1.2.3 Un sujet controversé

La constante cosmologique est un sujet controversé. Einstein dérive tout d'abord ses équations sans cette constante. Il se rend compte ensuite que l'univers qu'il décrit ainsi n'est pas stable et introduit pour la première fois la constante cosmologique dans ses équations. Ensuite, les observations de l'expansion de l'univers vont le contraindre à la supprimer.

Que faut-il dès lors penser de cette constante qui va et vient dans les équations ? En fait, on peut montrer que, mathématiquement, cette constante a un sens.

En relativité générale, nous avons utilisé la connexion de Levi-Civita (voir section 1.1.2), cette connexion étant métrique, on a dès lors que

$$\nabla_\nu g_{\mu\nu} = 0, \quad g_{\mu\nu} \in \ker(\nabla_\nu).$$

De plus, on peut montrer que [13] la dérivée covariante du tenseur d'Einstein est également nulle

$$\nabla_\nu G^{\mu\nu} = 0, \quad G^{\mu\nu} \in \ker(\nabla_\nu).$$

Dans les années 1930 [13], Cartan montre que le tenseur de métrique et le tenseur d'Einstein sont les seuls tenseurs symétriques d'ordre 2 construits uniquement à partir du tenseur métrique et de ses dérivées premières et secondes dont la divergence covariante soit nulle.

Les équations d'Einstein (sans constante cosmologique) montrent la proportionnalité existante entre le tenseur énergie-impulsion T et le tenseur d'Einstein G .

$$G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}.$$

Comme la dérivée covariante du tenseur d'Einstein est nulle, celle du tenseur énergie-impulsion doit l'être également.

$$\nabla_\nu T^{\mu\nu} = 0, \quad T^{\mu\nu} \in \ker(\nabla_\nu).$$

Cette relation correspond à la conservation de l'énergie-impulsion.

On comprend mieux l'importance de la constante cosmologique dans les équations d'Einstein. En effet, le noyau d'un opérateur étant un espace vectoriel, son équation est donnée par une combinaison linéaire de vecteurs indépendants. Or comme il n'y a que trois éléments indépendants dans ce noyau, l'équation peut s'écrire comme

$$aG + bT + cg = 0 \Leftrightarrow G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} - \kappa T_{\mu\nu} = 0.$$

Si l'importance de la constante cosmologique est justifiée, sa nature est cependant très peu connue. En introduisant plus tard l'énergie noire, nous verrons que la constante cosmologique peut être considérée comme une partie de celle-ci et joue un rôle similaire en expliquant l'expansion accélérée de l'Univers.

1.2.4 Preuves observationnelles de l'existence de l'énergie noire

Une des questions les plus importantes à laquelle la cosmologie est confrontée, est celle du contenu énergétique de l'Univers. Connaître le contenu de l'Univers et les proportions des différents constituants permet d'approximer son âge et de confirmer ou non son caractère infini. C'est en analysant le contenu du cosmos que les astronomes ont mis en évidence l'existence de la mystérieuse énergie sombre, énergie expliquant l'expansion accélérée de l'Univers.

Plusieurs observations cosmologiques confortent l'existence de l'énergie sombre qui constituerait 70% [19] de l'Univers. Ces preuves sont brièvement décrites dans cette section.

Contenu énergétique de l'Univers

L'Univers est composé de diverses formes de matière et d'énergie. Sa composition change au cours du temps. A l'heure actuelle, l'Univers comprend 30% [19] de matière. Cette matière se décompose en une partie visible : la matière baryonique et la radiation et une partie invisible : la matière sombre. Si on ne peut observer la matière sombre, on a cependant des preuves de son existence, elle correspond en fait à 90% de la matière.

Donc 30% de L'Univers est composé de matière, il reste 70% de l'Univers "à remplir", c'est là qu'intervient l'énergie noire.

Supernovae

En 1928 [4], l'astronome américain Hubble découvre que les galaxies s'éloignent de nous et ce d'autant plus rapidement qu'elles sont distantes. En interprétant les données de Hubble, Georges Lemaître, astronome et physicien belge, [4] justifie la fuite des galaxies par l'expansion de l'Univers.

A partir de 1998, les équipes d'astronomes de Perlmutter et de Schmidt et Riess observent l'explosion de naines blanches dans l'Univers : les supernovae de type I. Une naine blanche est une vieille étoile peu massive ($< 1.5 \times$ masse du soleil) qui a consommé tout son hydrogène et tout son hélium, suite à quoi il ne reste qu'une boule de carbone très dense. Cette boule de carbone ne peut fusionner car sa masse est trop faible. Si la naine blanche possède un compagnon stellaire, alors elle va pouvoir interagir et tout doucement absorber sa voisine jusqu'à atteindre une masse critique et exploser.

La lumière émise par les supernovae de type I a pu être calibrée précisément et la comparaison entre la densité de lumière de l'étoile explosant et le modèle permet de déterminer sa distance. Il suffit alors de confronter cette distance obtenue à celle donnée par le modèle cosmologique. Les observations ont montré que les résultats correspondaient à ceux obtenus par un modèle cosmologique d'un Univers en expansion accélérée.

Les trois astronomes cités précédemment ont reçu le prix Nobel de physique en 2011 pour cette découverte. Le graphique suivant (figure 1.4) reprend la distance des astres, donnée par leur luminosité, en fonction de leur vitesse de récession calculée via leur décalage vers le rouge (redshift, z). La courbe supérieure est le modèle de l'Univers contenant 70% d'énergie noire, celui-ci est en accord avec les observations alors que la courbe inférieure représentant un Univers composé uniquement de matière ne l'est plus au-delà d'une certaine distance correspondant à $z = 0.1$.

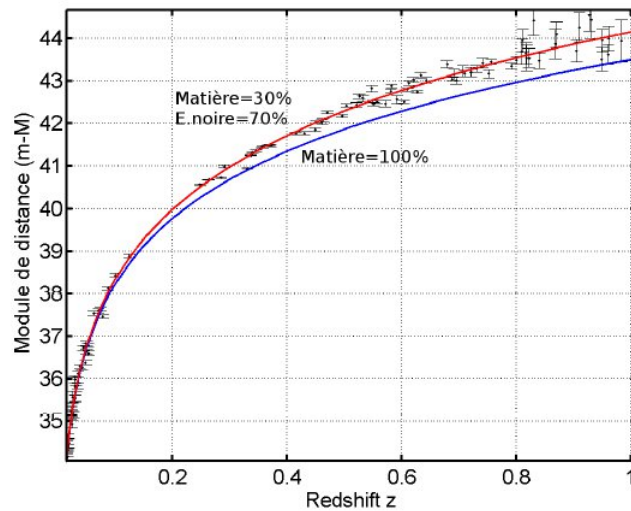


FIGURE 1.4 – [4] Diagramme de Hubble des Supernovae lointaines. La courbe supérieure correspond à 30% de matière et 70% d'énergie noire, l'inférieure à 100% de matière.

Age de l'Univers

En cosmologie, le facteur d'échelle,

$$a(t) := \frac{R(t)}{R_0}$$

où R_0 est une longueur caractéristique, est un facteur sans dimension introduit pour décrire l'expansion de l'Univers, il est tel que sa valeur actuelle est l'unité. Ce facteur caractérise la façon dont la distance entre deux objets évolue au cours du temps.

Sur la figure suivante (figure 1.5), deux modèles d'expansion de l'Univers sont représentés. La courbe supérieure correspond à un Univers composé de 100% de matière, l'âge actuel de l'Univers serait, selon ce modèle, de 9 milliards d'années. La courbe inférieure représente un Univers constitué de 30% de matière et 70% d'énergie noire avec un âge actuel de 14 milliards d'années pour l'Univers. Ce deuxième modèle est plus proche des observations actuelles datant les plus vieilles étoiles à un âge compris entre 10 et 15 milliards d'années.

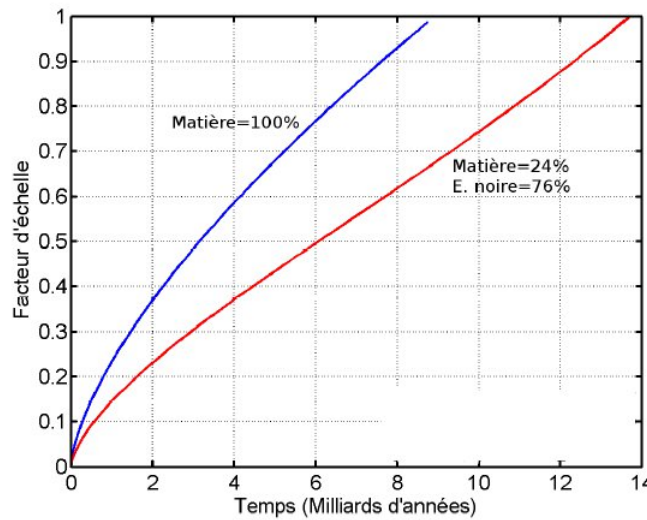


FIGURE 1.5 – [4] Modèles d'expansion de l'Univers. La courbe supérieure représente un Univers composé de 100% de matière, l'inférieure correspond à 30% de matière et 70% d'énergie sombre.

Sur ces deux modèles, le taux d'expansion est égal au taux d'expansion mesuré actuellement (H_0). L'accélération de l'expansion de l'Univers est aujourd'hui vérifiée. Or cette accélération n'est permise par le modèle cosmologique que si l'Univers est dominé par de la matière antigravifique, de l'énergie noire. Nous reviendrons sur cette condition dans la suite de l'analyse.

1.3 Equations de Friedmann-Lemaître

1.3.1 Éléments de la cosmologie de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker

La dynamique de l'Univers est décrite par les équations d'Einstein. En admettant le principe cosmologique (voir (P.C.)), la métrique de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW) est simplifiée. Dans le cadre de ce travail, nous utiliserons la métrique exprimée sous la forme suivante :

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right] \quad (1.15)$$

avec :

- $k = \frac{K}{|K|}$ de sorte que $k = -1$, $k = 0$ où $k = +1$ et K représente la courbure de l'espace, k est la courbure normalisée.
- les coordonnées r, θ et ϕ sont les coordonnées comobiles (note (2)).

Cette métrique représente en fait un référentiel synchrone : référentiel dans lequel la coordonnée temporelle t est telle que tout observateur, en tout point de l'espace, mesure les mêmes propriétés au même instant t .

A partir de notre métrique, nous avons les composantes covariantes de g :

$$\begin{aligned} g_{00} &= c^2 \\ g_{11} &= -\frac{a^2(t)}{1 - kr^2} \\ g_{22} &= -a^2(t)r^2 \\ g_{33} &= -a^2(t)r^2 \sin^2 \theta \end{aligned}$$

et comme la métrique est diagonale, les composantes contravariantes $g^{\mu\nu}$ sont données par l'inverse des $g_{\mu\nu}$.

Nous pouvons alors calculer les coefficients de connexion à partir de l'équation (1.10)

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2} g^{\lambda\sigma} (\partial_\nu g_{\sigma\mu} + \partial_\mu g_{\sigma\nu} - \partial_\sigma g_{\mu\nu}).$$

Les 13 coefficients non nuls sont :

$$\begin{aligned}
\Gamma_{11}^0 &= \frac{1}{2}g^{00}(-\partial_0 g_{11}) = \frac{a\dot{a}}{c^2(1-kr^2)} \\
\Gamma_{22}^0 &= \frac{1}{2}g^{00}(-\partial_0 g_{22}) = a\dot{a}\frac{r^2}{c^2} \\
\Gamma_{33}^0 &= \frac{1}{2}g^{00}(-\partial_0 g_{33}) = a\dot{a}\frac{r^2}{c^2}\sin^2\theta \\
\Gamma_{01}^1 &= \frac{1}{2}g^{11}(\partial_0 g_{11}) = \frac{\dot{a}}{a} \\
\Gamma_{11}^1 &= \frac{1}{2}g^{11}(\partial_1 g_{11}) = \frac{kr}{1-kr^2} \\
\Gamma_{22}^1 &= \frac{1}{2}g^{11}(-\partial_1 g_{22}) = -r(1-kr^2) \\
\Gamma_{33}^1 &= \frac{1}{2}g^{11}(-\partial_1 g_{33}) = -r(1-kr^2)\sin^2\theta \\
\Gamma_{02}^2 &= \frac{1}{2}g^{22}(\partial_0 g_{22}) = \frac{\dot{a}}{a} \\
\Gamma_{12}^2 &= \frac{1}{2}g^{22}(\partial_1 g_{22}) = \frac{1}{r} \\
\Gamma_{33}^2 &= \frac{1}{2}g^{22}(-\partial_2 g_{33}) = -\sin\theta\cos\theta \\
\Gamma_{03}^3 &= \frac{1}{2}g^{33}(\partial_0 g_{33}) = \frac{\dot{a}}{a} \\
\Gamma_{13}^3 &= \frac{1}{2}g^{33}(\partial_1 g_{33}) = \frac{1}{r} \\
\Gamma_{23}^3 &= \frac{1}{2}g^{33}(\partial_2 g_{33}) = \cot\theta
\end{aligned}$$

Pour calculer les équations d'Einstein, nous devons passer par le tenseur de Ricci qui est donné par

$$R_{\mu\nu} = \partial_\nu \Gamma_{\mu\sigma}^\sigma - \partial_\sigma \Gamma_{\mu\nu}^\sigma + \Gamma_{\mu\sigma}^\rho \Gamma_{\rho\nu}^\sigma - \Gamma_{\mu\nu}^\rho \Gamma_{\rho\sigma}^\sigma.$$

Développons cette relation pour R_{00} :

$$\begin{aligned}
R_{00} &= \underset{(1)}{\partial_0 \Gamma_{0\sigma}^\sigma} - \underset{(2)}{\partial_\sigma \Gamma_{00}^\sigma} + \underset{(3)}{\Gamma_{0\sigma}^\rho \Gamma_{\rho 0}^\sigma} - \underset{(4)}{\Gamma_{00}^\rho \Gamma_{\rho\sigma}^\sigma} \\
(1) &= \partial_0 \Gamma_{00}^0 + \partial_0 \Gamma_{01}^1 + \partial_0 \Gamma_{02}^2 + \partial_0 \Gamma_{03}^3 \\
&= 3 \partial_0 \frac{\dot{a}}{a} \\
&= 3 \left(\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2} \right) \\
(2) &= 0 \\
(3) &= 2\Gamma_{01}^1 + 2\Gamma_{02}^2 + 2\Gamma_{03}^3 \\
&= 3 \frac{\dot{a}^2}{a^2} \\
(4) &= 0 \\
R_{00} &= 3 \frac{\ddot{a}}{a}
\end{aligned}$$

De la même manière, on obtient

$$\begin{aligned}
R_{11} &= \frac{-(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2c^2 k)}{c^2(1 - kr^2)}, \\
R_{22} &= -(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2c^2 k) \frac{r^2}{c^2}, \\
R_{33} &= -(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2c^2 k) \frac{r^2 \sin^2 \theta}{c^2}.
\end{aligned}$$

Dans notre modélisation de l'Univers, nous allons supposer que la matière qui le constitue est un fluide parfait caractérisé par sa densité et sa pression. De ce fait, le tenseur énergie impulsion est donné par [19]

$$T^{\mu\nu} = \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) u^\mu u^\nu - p g^{\mu\nu} \quad (1.16)$$

où u^μ représente le quadri-vecteur vitesse du fluide. Comme nous utilisons les coordonnées comobiles (ct, r, θ, ϕ) , la quadri-vitesse du fluide s'exprime comme $u^\mu = (1, 0, 0, 0)$ que l'on peut également écrire $u^\mu = \delta_0^\mu$ avec δ_i^j qui représente le symbole de Kronecker. En utilisant la métrique $g_{\mu\nu}$, on peut calculer les composantes covariantes de la quadri-vitesse :

$$u_\mu = g_{\mu\nu} \delta_0^\nu = g_{\mu 0} = c^2 \delta_\mu^0$$

et du tenseur énergie impulsion :

$$\begin{aligned}
T_{\mu\nu} &= g_{\alpha\mu}g_{\beta\nu}T^{\alpha\beta}, \\
&\stackrel{(1.16)}{=} g_{\alpha\mu}g_{\beta\nu}\left(\left(\rho + \frac{p}{c^2}\right)u^\alpha u^\beta - pg^{\alpha\beta}\right), \\
&= \left(\rho + \frac{p}{c^2}\right)g_{\alpha\mu}g_{\beta\nu}u^\alpha u^\beta - pg_{\alpha\mu}g_{\beta\nu}g^{\alpha\beta}, \\
&= \left(\rho + \frac{p}{c^2}\right)u_\mu u_\nu - pg_{\mu\nu}, \\
&= (\rho c^2 + p)c^2\delta_\mu^0\delta_\nu^0 - pg_{\mu\nu}.
\end{aligned}$$

Comme

$$u_\mu u^\mu = u_0 u^0 = 1c^2\delta_0^0 = c^2, \quad (1.17)$$

on peut exprimer T , la contraction de $T_{\mu\nu}$:

$$\begin{aligned}
T_\mu^\nu &= g_{\mu\alpha}T^{\alpha\nu}, \\
&= \left(\rho + \frac{p}{c^2}\right)g_{\mu\alpha}u^\alpha u^\nu - pg_{\mu\alpha}g^{\alpha\nu}, \\
&= \left(\rho + \frac{p}{c^2}\right)u_\mu u^\nu - p\delta_\mu^\nu. \\
T &= T_\mu^\mu = \left(\rho + \frac{p}{c^2}\right)u_\mu u^\mu - p\delta_\mu^\mu, \\
&\stackrel{(1.17)}{=} (\rho c^2 + p) - 4p, \\
&= \rho c^2 - 3p.
\end{aligned}$$

Calculons $T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Tg_{\mu\nu}$, terme utilisé dans les équations d'Einstein (1.14),

$$\begin{aligned}
T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Tg_{\mu\nu} &= (\rho c^2 + p)c^2\delta_\mu^0\delta_\nu^0 - pg_{\mu\nu} - \frac{1}{2}(\rho c^2 - 3p)g_{\mu\nu}, \\
&= (\rho c^2 + p)c^2\delta_\mu^0\delta_\nu^0 - \frac{1}{2}(\rho c^2 - p)g_{\mu\nu}.
\end{aligned}$$

Nous avons maintenant tous les éléments nécessaires pour expliciter les équations d'Einstein, nous pouvons les exprimer en termes de composantes :

$$\begin{aligned}
R_{00} &= -\kappa(T_{00} - \frac{1}{2}Tg_{00}) + \Lambda g_{00} \\
&= -\kappa((\rho c^2 + p) c^2 \delta_0^0 \delta_0^0 - \frac{1}{2}(\rho c^2 - p)c^2) + \Lambda c^2 \\
&= -\kappa((\rho c^2 + p) c^2 - \frac{1}{2}(\rho c^2 - p)c^2) + \Lambda c^2 \\
&= -\frac{1}{2}\kappa(\rho c^2 + 3p) c^2 + \Lambda c^2. \\
3\frac{\ddot{a}}{a} &= -\frac{1}{2}\kappa(\rho c^2 + 3p) c^2 + \Lambda c^2.
\end{aligned}$$

De la même manière, on obtient les autres composantes :

$$\begin{aligned}
R_{11} &= \frac{-(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2c^2k)}{c^2(1 - kr^2)} = \frac{-\left(\frac{1}{2}\kappa(\rho c^2 - p) + \Lambda\right) a^2}{1 - kr^2}, \\
R_{22} &= -(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2c^2k)\frac{r^2}{c^2} = -\left(\frac{1}{2}\kappa(\rho c^2 - p) + \Lambda\right) a^2 r^2, \\
R_{33} &= -(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2c^2k)\frac{r^2 \sin^2 \theta}{c^2} = -\left(\frac{1}{2}\kappa(\rho c^2 - p) + \Lambda\right) a^2 r^2 \sin^2 \theta.
\end{aligned}$$

L'homogénéité et l'isotropie supposées de l'Univers impliquent que les trois équations correspondant aux coordonnées spatiales sont équivalentes, il nous reste donc deux équations indépendantes connues sous le nom d'équations de Friedmann-Lemaître :

$$\begin{aligned}
\ddot{a} &= -\frac{4\pi G}{3} \left(\rho + \frac{3p}{c^2} \right) a + \frac{1}{3}\Lambda c^2 a, \\
\dot{a}^2 &= \frac{8\pi G}{3} \rho a^2 + \frac{1}{3}\Lambda c^2 a^2 - c^2 k.
\end{aligned}$$

En introduisant le paramètre de Hubble

$$H(t) := \frac{\dot{a}(t)}{a(t)},$$

on obtient une version modifiée des équations de Friedmann-Lemaître :

$$\boxed{\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} \left(\rho + \frac{3p}{c^2} \right) + \frac{1}{3}\Lambda c^2,} \quad (1.18)$$

$$\boxed{H^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho + \frac{1}{3}\Lambda c^2 - \frac{c^2 k}{a^2}.} \quad (1.19)$$

On obtient donc deux équations différentielles indépendantes. La variable de ces équations est le temps t , et deux paramètres sont à fixer : le scalaire de courbure k et la constante cosmologique Λ . Ces deux équations comprennent trois inconnues : le facteur d'échelle $a(t)$, la densité d'énergie $\rho(t)$ et la pression $p(t)$. Il nous faut donc une information supplémentaire pour résoudre ce système. Pour cela, on fixe l'équation d'état de la matière, par exemple, dans le cas barotropique, on a

$$p = \omega \rho.$$

1.3.2 Équations du mouvement du fluide cosmologique

Lorsque l'on fixe l'équation d'état de la matière, le système précédant (1.18 et 1.19) est un système de deux équations à deux inconnues et peut être résolu. Cependant nous allons dériver une troisième équation, utile pour les futurs développements. La forme générale des composantes du tenseur énergie-impulsion d'un fluide parfait est donnée par (1.16) :

$$T^{\mu\nu} = \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) u^\mu u^\nu - p g^{\mu\nu}.$$

De plus, l'égalité de Bianchi [3]

$$\nabla_\mu G^{\mu\nu} = 0$$

et l'équation d'Einstein (1.12)

$$G^{\mu\nu} = \kappa T^{\mu\nu}$$

nous amènent à l'équation de la conservation de l'énergie-impulsion donnée par

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0. \tag{1.20}$$

Cette équation traduit le fait que la totalité de l'énergie-impulsion contenue dans l'Univers se conserve lors de l'évolution de celui-ci. Nous allons montrer que cette expression permet d'obtenir les équations du mouvement et de continuité d'un fluide parfait. Comme (1.17)

$$u^\nu u_\nu = c^2$$

et (connexion métrique (1.9))

$$(\nabla_\lambda g_{\mu\nu}) = 0,$$

on a :

$$\begin{aligned}
\nabla_\mu(u^\nu u_\nu) &\stackrel{(\text{Leibniz})}{=} (\nabla_\mu u^\nu)u_\nu + u^\nu(\nabla_\mu u_\nu) \\
&= (\nabla_\mu u^\nu)u_\nu + g^{\lambda\nu}u_\lambda(\nabla_\mu u_\nu) \\
&\stackrel{(1.9)}{=} (\nabla_\mu u^\nu)u_\nu + u_\lambda(\nabla_\mu g^{\lambda\nu}u_\nu) \\
&= (\nabla_\mu u^\nu)u_\nu + u_\lambda(\nabla_\mu u^\lambda) \\
&= 2(\nabla_\mu u^\nu)u_\nu \\
&= 0.
\end{aligned}$$

En substituant (1.16) dans (1.20), nous obtenons :

$$\nabla_\mu \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) u^\mu u^\nu + \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) [(\nabla_\mu u^\mu)u^\nu + u^\mu(\nabla_\mu u^\nu)] - (\nabla_\mu p)g^{\mu\nu} = 0.$$

En contractant cette équation avec u_ν , on peut calculer :

$$\begin{aligned}
0 &= u_\nu [\nabla_\mu \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) u^\mu u^\nu + \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) [(\nabla_\mu u^\mu)u^\nu + u^\mu(\nabla_\mu u^\nu)] - (\nabla_\mu p)g^{\mu\nu}] \\
&= c^2 \nabla_\mu \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) u^\mu + \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) [c^2(\nabla_\mu u^\mu) + u^\mu(\nabla_\mu u^\nu)u_\nu] - (\nabla_\mu p)g^{\mu\nu}u_\nu \\
&= c^2(\nabla_\mu \rho)u^\mu + (\nabla_\mu p)u^\mu + c^2\rho(\nabla_\mu u^\mu) + p(\nabla_\mu u^\mu) - (\nabla_\mu p)u^\mu \\
&= (\nabla_\mu \rho)u^\mu + \rho(\nabla_\mu u^\mu) + \frac{p}{c^2}(\nabla_\mu u^\mu) \\
&= \nabla_\mu(\rho u^\mu) + \frac{p}{c^2}(\nabla_\mu u^\mu). \tag{1.21}
\end{aligned}$$

Avec l'expression (1.21), équation de continuité d'un fluide parfait, on en déduit l'équation suivante, équation du mouvement d'un fluide parfait :

$$\left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) u^\mu \nabla_\mu u^\nu = \left(g^{\mu\nu} - \frac{u^\mu u^\nu}{c^2} \right) \nabla_\mu p.$$

Ces deux dernières équations nous permettent de confirmer l'équation (1.20).

En développant à présent la dérivée covariante, l'équation (1.21) peut également s'écrire

$$(\partial_\mu \rho)u^\mu + \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) (\partial_\mu u^\mu + \Gamma_{\nu\mu}^\mu u^\nu) = 0.$$

Comme ρ n'est fonction que du temps, $u^\mu = \delta_0^\mu$ et $\Gamma_{0\mu}^\mu = \frac{\dot{a}}{a}$, nous obtenons l'expression de la conservation de l'énergie

$$\boxed{\dot{\rho} + \left(\rho + \frac{p}{c^2}\right) \frac{3\dot{a}}{a} = 0.} \quad (1.22)$$

Cette dernière équation est celle que nous recherchions. Elle est contenue dans les deux premières équations de Friedmann-Lemaître (en effet si l'on divise (1.19) par rapport au temps et que l'on exprime \ddot{a}/a en utilisant (1.18) et (1.19) pour éliminer H^2 , on obtient (1.22). Elle fait cependant apparaître $\dot{\rho}$ dont l'expression nous sera utile dans la suite.

Chapitre 2

Modèles d'interactions entre espèces

Maintenant que les notions de géométrie et de cosmologie sont posées, nous pouvons passer à la seconde partie de ce travail. Dans ce chapitre, nous allons écrire les équations de Friedmann-Lemaître sous la forme d'un système proie-prédateur. Nous allons donc, dans un premier temps, développer la théorie des systèmes Lotka-Volterra pour ensuite l'appliquer aux équations de l'Univers.

2.1 Dynamique des populations et équations de Lotka-Volterra

2.1.1 Croissance exponentielle et logistique

Lorsque plusieurs espèces interagissent, la dynamique de chaque espèce est touchée. En dynamique des populations, on considère principalement trois types d'interactions :

- La compétition est la situation où deux espèces exploitent une même ressource. Cette ressource étant limitée, la croissance d'une espèce se fait au détriment de l'autre espèce.
- Le mutualisme peut se traduire par la coopération. Dans cette situation, les espèces profitent l'une de l'autre et de ce fait, la croissance d'une espèce entraîne la croissance de la seconde.
- Le système proie-prédateur est une situation asymétrique : le prédateur profite de sa proie mais ne lui apporte rien.

Si l'on considère à présent une population discrète x de taux de croissance R , alors on a :

$$x_{n+1} = Rx_n$$

où x_n représente la densité d'une génération et x_{n+1} de la suivante. Si R est constant alors, après t générations, on trouvera comme densité $R^t x_0$ qui représente une croissance exponentielle tendant vers l'infini lorsque $R > 1$.

Comme, dans la majorité des systèmes, les populations ne sont pas discrètes mais continues, nous parlerons de $x(t)$ comme la population au temps t . Le taux de croissance de la population est alors donné par

$$\frac{\dot{x}}{x} = \frac{d(\log x)}{dt}$$

et peut s'interpréter comme la contribution moyenne d'un individu sur la croissance de la population. De nouveau, un taux de croissance constant implique une croissance exponentielle :

$$\frac{\dot{x}}{x} = r \Rightarrow x(t) = x(0)e^{rt}.$$

Afin de pallier à cette croissance exponentielle, nous allons insérer une décroissance linéaire, fonction de x , sur notre taux de croissance r . Nous parlerons alors d'équation logistique :

$$\dot{x} = rx \left(1 - \frac{x}{K}\right). \quad (2.1)$$

On peut remarquer que si $x = 0$ ou $x = K$ alors $\dot{x} = 0$ et la densité reste constante. Par contre elle va augmenter lorsque $0 < x < K$ et diminuer quand $x > K$. On appelle croissance logistique, le comportement de cette fonction pour des valeurs de x comprises entre 0 et K . La fonction logistique a deux particularités :

- Pour des valeurs de x proches de 0, la croissance est quasi exponentielle.
- Pour des valeurs plus grandes de x , la croissance ralentit et tend asymptotiquement vers K qui sera appelé capacité limite.

On retrouve ce comportement sur le graphique suivant :

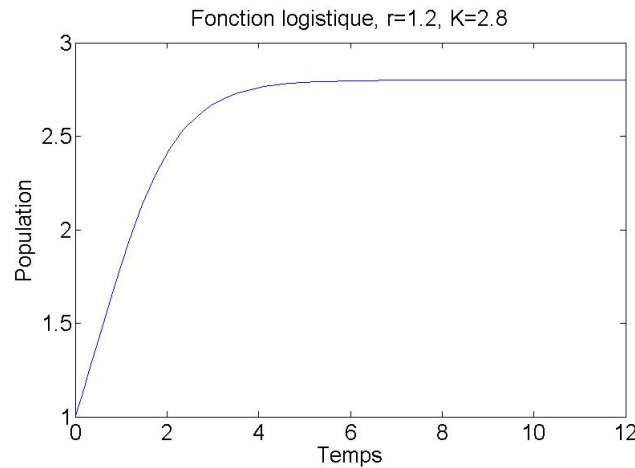


FIGURE 2.1 – Illustration de la fonction logistique

2.1.2 Equations de Lotka-Volterra pour un système proie-prédateur

La question du système proie-prédateur fut posée à Vito Volterra après la première guerre mondiale suite à une étrange constatation [9]. Alors que les hostilités entre l'Autriche et l'Italie perturbaient la pêche dans la mer Adriatique, (la présence de bombes dans l'eau empêchant les bateaux de passer), les pêcheurs furent étonnés de trouver plus de requins dans leur mer que de poissons. L'absence de pêche avait donc, semble-t-il, favorisé le nombre de prédateurs et non celui des proies. Analysons le système proie-prédateur afin de comprendre la situation.

Dans le système de Volterra, le taux de croissance des proies est considéré comme constant en l'absence de prédateurs et décroît linéairement lorsque ceux-ci apparaissent : $\frac{\dot{x}}{x} = a - by$. D'autre part, s'il n'y a plus de proies alors les prédateurs sont destinés à disparaître, leur taux de croissance est négatif, mais croît linéairement en présence de proies : $\frac{\dot{y}}{y} = -c + fx$. Nous obtenons alors le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = x(a - by), \\ \dot{y} = y(-c + fx). \end{cases} \quad (2.2)$$

Equilibres

On trouve facilement trois premières solutions pour ce système :

$$\begin{aligned} x(t) &= y(t) = 0 \\ x(t) &= 0, y(t) = y(0)e^{-ct} \quad \forall y(0) > 0 \\ y(t) &= 0, x(t) = x(0)e^{ct} \quad \forall x(0) > 0. \end{aligned}$$

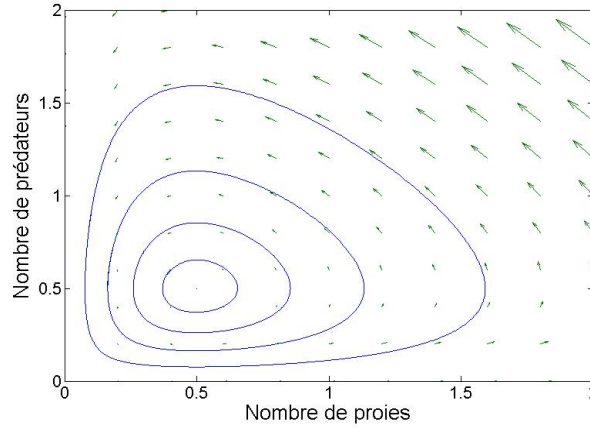
On remarque que si, à un moment donné, le nombre d'une espèce est nul alors il le restera pour toujours. De plus en absence de prédateurs, le nombre de proies tend vers $+\infty$ et par absence de proies, le nombre de prédateurs tend vers 0.

Dans le plan de phase, ces trois solutions correspondent à trois orbites : l'origine $(0,0)$ pour la première, le demi-axe positif y pour la seconde et le demi-axe positif x pour la dernière. Nous sommes donc en présence de trois orbites qui, par définition, ne peuvent pas se croiser ; un point se trouvant dans le quadrant positif du repère $(\mathbb{R}_+^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0\})$ y restera.

Il reste encore un équilibre du système à déterminer, notons-le \bar{x}, \bar{y} :

$$\bar{x}(t) = \frac{c}{f} \quad \text{et} \quad \bar{y}(t) = \frac{a}{b}.$$

Celui-ci détermine un point fixe dans l'espace de phase. Il suffit alors de comparer la valeur de x et y par rapport à leur valeur en ce point d'équilibre pour avoir le signe de \dot{x} et \dot{y} . En traçant le portrait de phase on obtient la figure ci-après sur laquelle on peut repérer le sens des orbites autour du point d'équilibre.

FIGURE 2.2 – Portrait de phase du système proie-prédateur avec $a = c = 0.5$, $b = f = 1$

Séparatrices

Faisons ici une petite parenthèse pour introduire la notion de séparatrice. Par définition, une séparatrice représente une frontière séparant deux modes de comportement dans une équation différentielle. Dans le système proie-prédateur, les séparatrices sont des droites horizontales et verticales :

$$\begin{cases} f_1(x, y) \equiv a - bx = 0 \rightarrow x = a/b, \\ f_2(x, y) \equiv c - fy = 0 \rightarrow y = c/f. \end{cases}$$

Elles séparent donc l'espace des phases en différentes régions et permettent d'étudier le comportement des orbites.

Orbites périodiques

Nous allons montrer que (comme peut le laisser supposer la figure 2.2) le point d'équilibre (\bar{x}, \bar{y}) est entouré d'orbites périodiques. Pour ce faire, multiplions la première ligne de (2.2) par $\frac{c - fx}{x}$ et la seconde par $\frac{a - by}{y}$, en additionnant ces deux termes, on a alors

$$\left(\frac{c}{x} - f\right) \dot{x} + \left(\frac{a}{y} - b\right) \dot{y} = 0$$

que l'on peut aussi écrire

$$\frac{d}{dt}(c \log x - fx + a \log y - by) = 0. \quad (2.3)$$

En posant

$$H(x) = \frac{c}{f} \log x - x, \quad G(y) = \frac{a}{b} \log y - y \quad \text{et} \quad V(x, y) = fH(x) + bG(y)$$

on trouve que $V(x, y)$ est une constante du mouvement :

$$\frac{d}{dt}V(x, y) = 0$$

De plus, $V(x, y)$ atteint son unique maximum en (\bar{x}, \bar{y}) :

$$\frac{dH}{dx} = \frac{\bar{x}}{x} - 1, \quad \frac{d^2H}{dx^2} = -\frac{\bar{x}}{x^2} < 0$$

et H atteint son maximum en \bar{x} , de même, G atteint son maximum en \bar{y} . Soit $\mathbf{F} := (\bar{x}, \bar{y})$, point fixe du système et unique maximum de V . L'ensemble de niveau constant $\{(x, y) \in \text{int } \mathbb{R}_+^2 : V(x, y) = cst\}$ représente des courbes fermées autour de \mathbf{F} .

Montrons à présent que les orbites sont périodiques. Supposons que

$$(x_0, y_0) \in A := \{x > c/f, y < a/b\},$$

dans ce cas

$$x' > 0, \text{ et } x \text{ est croissant}; \quad y' > 0, \text{ et } y \text{ est croissant.} \quad (2.4)$$

Soit $[u, \tau]$ l'intervalle pendant lequel on reste dans A , supposons que $\tau \rightarrow +\infty$. Lorsque $t \in [u, \tau]$, on a

$$x(t) > x(0), \quad \text{et} \quad y(t) > y(0).$$

Ainsi

$$\frac{y'}{y} = -c + fx > -c + fx_0 = r > 0 \quad \text{et} \quad y > ke^{rt} \text{ avec } k > 0.$$

L'expression de y montre qu'il existe un temps τ tel que si $t > \tau$ alors $y > a/b$ et donc on sort de A . Comme on reste sur la courbe de niveau, on entre donc dans B . En reproduisant le même raisonnement quatre fois, on montre que l'on revient au point de départ.

Il existe donc un temps T tel que $X_1(t) = x(t), y(t) = x(t+T), y(t+T) = X_2(t)$. Si l'on considère les deux solutions de l'équation différentielle qui ne diffèrent que de la

donnée initiale $X_1(0)$ pour l'une et $X_2(0)$ pour l'autre on a donc montré que les fonctions $X_1(t)$ et $X_2(t)$ vérifient la même équation différentielle avec la même condition initiale, ces deux fonctions sont donc égales pour tout t , et la solution est périodique.

Population moyenne

Comme on vient de prouver l'existence d'une période, on peut dès lors montrer que $\bar{y} = \frac{a}{b}$ représente la population moyenne de prédateurs. Soit T une période, à partir de

$$\frac{d}{dt}(\log x) = \frac{\dot{x}}{x} = a - by$$

calculons la moyenne sur cette période :

$$\int_0^T \frac{d}{dt} \log x(t) dt = \int_0^T (a - by(t)) dt$$

c'est-à-dire

$$\log x(T) - \log x(0) = aT - b \int_0^T y(t) dt.$$

Par définition de la période, $x(T) = x(0)$, et cela implique :

$$\frac{1}{T} \int_0^T y(t) dt = \frac{a}{b}.$$

On montre de même que $\bar{x} = \frac{c}{f}$ est la valeur moyenne de proies.

Nous pouvons à présent retrouver nos pêcheurs. La pêche s'introduit par un (petit) terme négatif dans notre équation des proies et comme moins de proies implique moins de prédateurs on aura également un (petit) terme négatif dans l'équation des prédateurs. Le système devient :

$$\begin{cases} \dot{x} = x(a - by) - \delta x, \\ \dot{y} = y(-c + fx) - \gamma y \end{cases}$$

Si l'on regarde maintenant où se situe le nouveau point d'équilibre, on trouve : $x_1 = \frac{c+\gamma}{f}$ et $y_1 = \frac{a-\delta}{b}$. Comparé à la valeur de l'équilibre de départ \bar{x}, \bar{y} on voit que $\bar{x} = \frac{c}{f} < x_1$ et le nombre de proies a augmenté alors que $\bar{y} = \frac{a}{b} > y_1$ et le nombre de prédateurs a donc bien augmenté par l'absence de pêche. Il faut cependant rester conscient que ces conclusions sont vérifiées pour des valeurs raisonnables de δ et γ , une pêche trop intensive entrainera bien évidemment une diminution du nombre de poissons disponibles ; les équations seraient en effet modifiées si l'on y ajoutait des termes supplémentaires.

2.1.3 Equations de Lotka-Volterra pour deux espèces en compétition

Regardons à présent ce qui se passe lorsque deux espèces sont en compétition pour une ressource limitée. Soient les deux espèces x et y , leur taux de croissance respectif suit une loi de croissance logistique. L'interaction des espèces peut être positive ou négative et sera déterminée par le signe des coefficients. Soient

- a et e les taux de croissance de chaque espèce,
- c et f les coefficients d'interaction entre les deux espèces,
- b et g les coefficients d'interaction au sein d'une même espèce,

ces coefficients sont supposés non nuls, les équations de Lotka-Volterra s'écrivent alors :

$$\begin{cases} \dot{x} = x(a - bx - cy), \\ \dot{y} = y(e - fx - gy). \end{cases}$$

Comme dans le système proie-prédateur, on remarque que les demi-axes x et y sont des orbites. Cela assure que des populations positives le resteront toujours. Les trois premiers équilibres du système sont respectivement $(0, 0)$, $(a/b, 0)$ et $(0, e/g)$, leur stabilité va dépendre des valeurs propres du système linéarisé. La détermination du dernier équilibre, point d'équilibre intérieur, va jouer un rôle plus important dans la dynamique du système.

Dans la section (2.1.2), nous avons montré que l'étude du système en fonction des séparatrices est cohérente. On peut en effet prouver que l'orbite va, ou non, rester dans une partie de l'espace délimitée par les séparatrices. Nous allons donc les utiliser ici pour caractériser l'évolution des deux espèces. Les séparatrices sont données par :

$$\begin{cases} f_1(x, y) \equiv a - bx - cy = 0, \\ f_2(x, y) \equiv e - fx - gy = 0. \end{cases}$$

Elles divisent l'espace des phases en plusieurs régions pour lesquelles on peut regarder le signe de \dot{x} et \dot{y} afin de déterminer le comportement du système. Plusieurs cas se présentent alors :

(a) Si $bg - cf = 0$, alors les séparatrices sont parallèles. Elles sont croissantes ou décroissantes en fonction du signe des coefficients (elles pourraient être confondues).

Choisissons un système dans lequel $bg = cf$, $a/c > e/g > 0$ et tel que les deux droites soient décroissantes (le cas des droites croissantes se traite de manière similaire). En dessous de f_1 , \dot{x} est positif et x est croissant, il est décroissant au-dessus de cette droite. De même, en dessous de f_2 , \dot{y} est positif et y est croissant, il est décroissant au-dessus de f_2 . La situation est représentée sur la figure suivante :

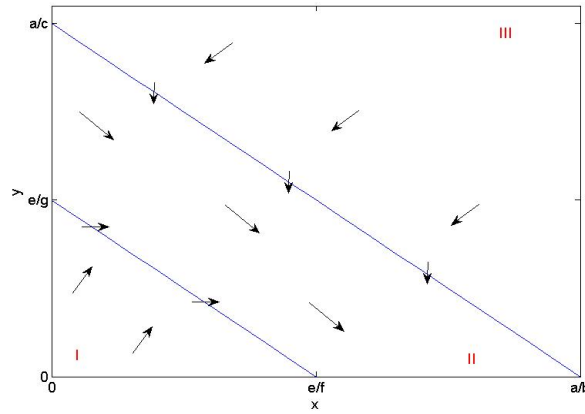


FIGURE 2.3 – Représentation de deux espèces en compétition avec $a/c > e/g$ et $bg = cf$.

Après un certain temps, les orbites partant des zones I et III vont se retrouver dans la zone II, pour ensuite se diriger vers la frontière, et plus précisément vers l'équilibre $\frac{a}{b}$.

(b) Si $bg - cf \neq 0$, alors les séparatrices sont sécantes. Si elles se croisent dans \mathbb{R}_+^2 alors le dernier point d'équilibre est donné par

$$x^* = \frac{ag - ce}{bg - cf} \text{ et } y^* = \frac{be - af}{bg - cf}.$$

Si nous considérons un système avec $bg > cf$, alors, pour que notre point (x^*, y^*) appartienne à \mathbb{R}_+^2 , il faut que $ag > ce$ et $be > af$ donc $\frac{a}{c} > \frac{e}{g}$. De nouveau \dot{x} est positif en dessous de f_1 et négatif au-dessus, \dot{y} est positif en dessous de f_2 et négatif au-dessus. On retrouve cette situation sur la figure suivante, on peut remarquer que le point (x^*, y^*) est un attracteur.

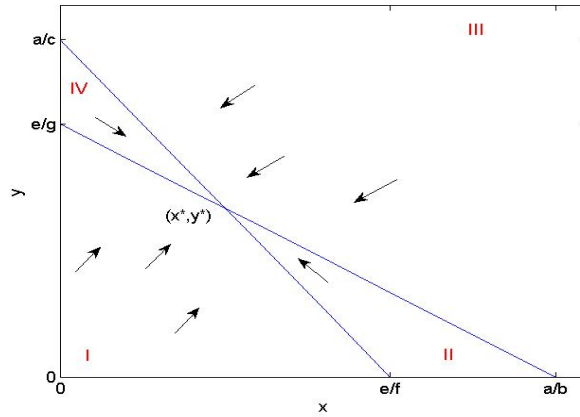


FIGURE 2.4 – Représentation de deux espèces en compétition avec $a/c > e/g$ et $bg > cf$.

Quelle que soit la condition initiale, toutes les orbites se dirigent vers le point d'équilibre. Après cette première approche des équations de Lotka-Volterra, nous pouvons passer à l'étude de notre modèle d'Univers.

2.2 Dynamique de l'Univers homogène et isotrope

Considérons un Univers composé de matière (m), de courbure (k), et de constante cosmologique (Λ). Chaque composant de notre fluide cosmologique est considéré comme fluide parfait barotropique et dès lors son équation d'état est donnée par

$$p_i = \omega_i \rho_i c^2 \quad (2.5)$$

avec ω_i paramètre de l'équation d'état qui, en relativité générale, varie entre -1 et 1 selon la nature du fluide considéré (nous verrons plus tard que l'on pourrait considérer des valeurs inférieures à -1 pour ce que l'on appelle "énergie noire fantôme"). On parle ici de matière au sens large, la véritable nature de l'élément considéré dépendra de la valeur du ω . Le modèle présenté dans cette section considère un ω constant par morceaux, c'est-à-dire que seule l'espèce dominante sera prise en compte et pourra dès lors changer au cours du temps. On sait que

- $\omega = -1$ pour le vide quantique (constante cosmologique),
- $\omega \in [-1, -1/3]$ pour l'énergie sombre (accélération de l'Univers),
- $\omega = 0$ pour un gaz de poussières (matière noire et baryonique),
- $\omega = 1/3$ pour un gaz parfait de photons et particules relativistes,
- $\omega = 2/3$ pour un gaz parfait monoatomique,
- $\omega = 1$ pour de la matière raide.

On peut retrouver ces valeurs et le détail du calcul de ω (pour $\omega = 1/3$ et $2/3$) dans [14]. Pour la suite de l'analyse, nous choisirons un système d'unité dans lequel $c = 1$.

2.2.1 Equations de Friedmann-Lemaître en fonction des paramètres de densité

Nous allons à présent introduire des paramètres sans dimension, les paramètres de densité, pour simplifier l'écriture des équations. Ceux-ci sont définis par

$$\Omega_m(t) := \frac{8\pi G}{3H^2(t)}\rho(t) \quad (2.6)$$

$$\Omega_\Lambda(t) := \frac{\Lambda}{3H^2} \quad (2.7)$$

$$\Omega_k(t) := -\frac{k}{a^2 H^2} \quad (2.8)$$

Grâce à l'équation barotrope (2.5) et à ces paramètres, nous pouvons simplifier les équations de Friedmann-Lemaître. En divisant l'équation (1.19)

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho + \frac{1}{3}\Lambda - \frac{k}{a^2}$$

par H^2 , on obtient :

$$\frac{8\pi G}{3H^2}\rho + \frac{1}{3H^2}\Lambda - \frac{k}{a^2 H^2} = 1$$

$$\Leftrightarrow \Omega_m + \Omega_\Lambda + \Omega_k = 1.$$

Exprimons à présent l'équation (1.18)

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) + \frac{1}{3}\Lambda$$

en fonction des densités. En multipliant cette équation par $\frac{a^2}{\dot{a}^2}$, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\frac{a^2}{\dot{a}^2} \frac{\ddot{a}}{a} &= -\frac{4\pi G}{3} (\rho + 3p) \frac{a^2}{\dot{a}^2} + \frac{1}{3} \Lambda \frac{a^2}{\dot{a}^2} \\
\Leftrightarrow \frac{\ddot{a}a}{\dot{a}^2} &= -\frac{4\pi G}{3H^2} (\rho + 3p) + \frac{1}{3H^2} \Lambda \\
\stackrel{(2.5)}{\Leftrightarrow} q &= \frac{1}{2} \Omega_m (1 + 3\omega) - \Omega_\Lambda
\end{aligned} \tag{2.9}$$

avec $q := -\frac{\ddot{a}a}{\dot{a}^2}$ le facteur de décélération.

En fonction des paramètres de densité, les équations de Friedmann-Lemaître sont données par :

$$1 = \Omega_m + \Omega_\Lambda + \Omega_k, \tag{2.10}$$

$$q = \frac{1}{2} \Omega_m (1 + 3\omega) - \Omega_\Lambda, \tag{2.11}$$

$$\dot{\rho} = -3H(\rho + p). \tag{2.12}$$

Pour l'étude de ce système, nous allons introduire le temps conforme. La dérivée par rapport à ce temps sera notée prime ' et correspondra à la dérivée par rapport à $\ln a$. Attendu que a est une fonction du seul temps t , on peut remarquer que quelque soit la quantité $X(t)$, on a

$$\frac{dX}{dt} = \frac{dX}{d \ln a} \frac{d \ln a}{dt} = X' H$$

où $\frac{\dot{a}}{a} = H$ est la constante de Hubble. Donc

$$(2.12) \stackrel{p=\omega\rho}{\Rightarrow} (\ln \rho)' = -3(1 + \omega).$$

Notons de plus que

$$\begin{aligned}
(\ln H)' &= \left(\ln \frac{\dot{a}}{a} \right)' = (\ln \dot{a} - \ln a)' = \frac{d \ln \dot{a}}{d \ln a} - 1, \\
\frac{d \ln \dot{a}}{d \ln a} &= \frac{\frac{d \ln \dot{a}}{dt}}{\frac{d \ln a}{dt}} = \frac{\ddot{a}a}{\dot{a}^2} = -q, \\
(\ln H)' &= -q - 1.
\end{aligned} \tag{2.13}$$

Avec ces relations, on peut calculer Ω'_m et Ω'_Λ :

$$\begin{aligned}
 (\ln \Omega_m)' &= \frac{\Omega'_m}{\Omega_m} \\
 &= \left[\ln \left(\frac{8\pi G}{3} \right) + \ln(\rho) - 2 \ln(H) \right]' \\
 &= -3(1 + \omega) + 2q + 2;
 \end{aligned} \tag{2.14}$$

$$\begin{aligned}
 (\ln \Omega_\Lambda)' &= \frac{\Omega'_\Lambda}{\Omega_\Lambda} \\
 &= \left[\ln \left(\frac{\Lambda}{3} \right) - 2 \ln(H) \right]' \\
 &= 2q + 2.
 \end{aligned}$$

2.2.2 Evolution du paramètre de densité $\rho(t)$

En supposant que les fluides cosmologiques sont barotropiques :

$$p = \omega \rho,$$

l'équation d'évolution du paramètre de densité, (2.12), peut être résolue. Dans ce cas, on a

$$\rho \propto a^{-3(1+\omega)}.$$

Nous savons que la valeur du paramètre ω dépend du fluide considéré. Nous pouvons alors noter que :

- si $\omega < -1$ (énergie noire fantôme) alors ρ est proportionnel à une fonction puissance croissante.
- si $\omega > -1$ alors ρ est proportionnel à une fonction puissance décroissante.

Si l'on compare, par exemple, de la matière noire, $\omega = 0$, et des photons, $\omega = 1/3$, alors la densité de la matière noire décroîtra moins rapidement que celle des photons. L'équation du paramètre de densité expliquera la dominance de certaines espèces dans la suite de l'analyse.

2.2.3 Etats d'équilibre de l'Univers de Friedmann-Lemaître

Grâce aux expressions des Ω'_m et Ω'_Λ calculées précédemment, et en remplaçant la valeur de q par (2.11), on déduit le système dynamique suivant, système de Lotka-Volterra, dont nous allons étudier les équilibres :

$$\begin{cases} 1 = \Omega_m + \Omega_\Lambda + \Omega_k, \\ \Omega'_m = \Omega_m [-(1 + 3\omega) + (1 + 3\omega)\Omega_m - 2\Omega_\Lambda], \\ \Omega'_\Lambda = \Omega_\Lambda [2 + (1 + 3\omega)\Omega_m - 2\Omega_\Lambda]. \end{cases} \quad (2.15)$$

Par définition, Ω_m est positif. La valeur actuelle de Ω_Λ a été mesurée à 0.7 [19]. Comme les axes x et y sont des orbites, une condition initiale positive entraînera une population positive au cours du temps. De plus, la condition (2.10) nous permet de limiter notre domaine à $[0, 1 - \Omega_k] \times [0, 1 - \Omega_k]$. Ω_k peut aussi bien être négatif que positif, en fonction du signe de la courbure.

Pour étudier la stabilité des points fixes, nous aurons besoin de la matrice jacobienne du système,

$$J_{ij} := \frac{\partial \Omega'_i}{\partial \Omega_j}$$

$$J = \begin{pmatrix} 2(1 + 3\omega)\Omega_m - (1 + 3\omega) - 2\Omega_\Lambda & -2\Omega_m \\ (1 + 3\omega)\Omega_\Lambda & (1 + 3\omega)\Omega_m - 4\Omega_\Lambda + 2 \end{pmatrix}.$$

Etudier la stabilité des équilibres d'un système en utilisant le jacobien n'est valable que si toutes les valeurs propres de cette matrice évaluée au point d'équilibre ont une partie réelle non nulle. En effet, le théorème de Hartman-Grobman [16] nous indique que l'étude du système linéarisé, au voisinage des équilibres, donne une idée correcte (équivalence topologique) du système général autour de ce point si les valeurs propres sont à partie réelle non nulle. Un tel point est alors appelé équilibre hyperbolique. Dans le cas contraire, on ne peut rien conclure du système général à partir du jacobien, il faudra utiliser des théorèmes plus généraux comme Lyapunov, Poincaré-Bendixon ou Bendixon-Dulac.

Univers de Milne

Le premier équilibre de notre système est

$$\Omega_m = 0, \Omega_\Lambda = 0, \Rightarrow \Omega_k = 1.$$

Nous sommes alors dans un Univers de Milne dans lequel il n'y a ni matière ni constante cosmologique, seulement de la courbure. De plus, cette courbure est négative :

$$\Omega_k = 1 \Rightarrow k \stackrel{(2.8)}{=} -a^2 H^2.$$

La géométrie d'un tel espace est hyperbolique. Les équations de Friedmann-Lemaître d'un tel Univers se résolvent facilement, on a

$$\frac{\ddot{a}}{a} = 0, \text{ et } a(t) = \dot{a}(0)t + a(0).$$

Dans un tel Univers, il existe un temps pour lequel $R = 0$, c'est le Big Bang, et depuis ce phénomène, l'Univers est en expansion linéaire. En calculant les valeurs propres du jacobien évalué en ce point, on trouve

$$\lambda_1 = 2, \text{ et } \lambda_2 = -1 - 3\omega.$$

Comme précisé précédemment, $\omega \in [-1, 1]$, donc

- si $\omega \in [-1, -\frac{1}{3}[$, les deux valeurs propres sont positives et l'Univers de Milne est un nœud instable.
- si $\omega \in]-\frac{1}{3}, 1]$, on a une valeur propre positive et une négative et cet Univers est un point de selle.

Si $\omega = -\frac{1}{3}$, alors $\lambda_2 = 0$ et l'équilibre n'est plus hyperbolique. Le linéarisé ne nous apprend rien sur la dynamique du système non linéarisé.

Univers d'Einstein-de Sitter

Le second équilibre du système est donné par

$$\Omega_m = 1, \Omega_\Lambda = 0 \Rightarrow \Omega_k = 0.$$

Cet Univers ne contient que de la matière et correspond à l'Univers d'Einstein-de Sitter, c'est un Univers plat ($k = 0$). La seconde équation de Friedmann-Lemaître (1.19) ($c^2 = 1$) devient

$$\rho = \frac{3}{8\pi G} \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2.$$

En insérant cette équation dans la première équation de Friedmann-Lemaître (1.18), on trouve :

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{-(1+3\omega)}{2} \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 \Rightarrow \frac{d \ln \dot{a}}{dt} = \frac{d \ln a^{\frac{-(1+3\omega)}{2}}}{dt}.$$

Donc $\dot{a} = c_0 a^{\frac{-(1+3\omega)}{2}}$ avec $c_0 > 0$ et $a^{\frac{(1+3\omega)}{2}} da = c_0 dt$, on peut intégrer cette relation en choisissant astucieusement les constantes pour garder un $a(t)$ positif. On obtient finalement :

$$\begin{cases} a(t) = a(0)e^{\alpha t} & \text{si } \omega = -1 \\ a(t) = \frac{3(1+\omega)}{2} c_0 (t + t_0)^{\frac{2}{3(1+\omega)}} & \text{avec } t_0 > 0 \quad \text{si } \omega > -1 \end{cases}$$

Un Univers ne contenant que du vide quantique $\omega = -1$ est en expansion exponentielle. Si $\omega > -1$, alors il est en expansion décélérée.

Comme précédemment, on effectue le calcul des valeurs propres en ce point d'équilibre, et on a

$$\lambda_1 = 1 + 3\omega, \text{ et } \lambda_2 = 3 + 3\omega$$

et la situation est la suivante :

- si $\omega \in]-1, -\frac{1}{3}[$, les deux valeurs propres sont de signe opposé et l'Univers d'Einstein-de Sitter est un point de selle.
- si $\omega \in]-\frac{1}{3}, 1]$, les valeurs propres sont positives et cet Univers est un nœud instable.

De nouveau, le linéarisé ne nous apprend rien sur la dynamique du système non linéarisé pour $\omega = -1$ ou $\omega = -\frac{1}{3}$ car ces valeurs impliquent des valeurs propres nulles.

Univers de de Sitter

Le dernier équilibre se trouve en

$$\Omega_m = 0, \Omega_\Lambda = 1 \Rightarrow \Omega_k = 0$$

c'est l'Univers de de Sitter qui est également un Univers plat mais ne contient que de la constante cosmologique.

Les équations de Friedmann-Lemaître deviennent

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2, \Rightarrow \frac{d \ln \dot{a}}{dt} = \frac{d \ln a}{dt}$$

que l'on peut intégrer :

$$\ln(\dot{a}) = \ln(\alpha a) \text{ où } \alpha = \frac{\dot{a}(0)}{a(0)} \in \mathbb{R}_+.$$

La fonction logarithme étant bijective, on peut intégrer le système $\dot{a} = \alpha a$ et obtenir

$$a(t) = a(0)e^{\alpha t}.$$

Cet Univers n'a pas connu de Big Bang puisque $a = 0$ n'est obtenu que lorsque $t \rightarrow -\infty$, il est en inflation exponentielle depuis toujours.

Pour cet équilibre, l'étude des valeurs propres du jacobien donne

$$\lambda_1 = -2 \text{ et } \lambda_2 = -3 - 3\omega.$$

Quelle que soit la valeur de $\omega \in]-1, 1]$ les deux valeurs propres sont négatives. Cet Univers est un nœud stable ou puits attractif.

Si la linéarisation du système autour des points d'équilibre nous donne un premier aperçu de la dynamique du système, elle n'est cependant pas suffisante pour déterminer le comportement global, et l'existence de cycles limites. Nous allons dès lors voir plusieurs résultats intéressants et étudier la dynamique du système autour des séparatrices pour avoir une vue plus générale du système. Deux cas sont en suspens, $\omega = -\frac{1}{3}$ et $\omega = -1$, nous devons approfondir l'analyse.

2.2.4 Etude approfondie de la dynamique

Les équations de Lotka-Volterra sont déjà bien connues dans la littérature. Nous pouvons utiliser les résultats suivants, dus à Hofbauer et explicités dans [8], pour la suite de l'analyse.

- Les équations de Lotka-Volterra en dimension 2 ne peuvent pas contenir de cycle limite¹.
- S'il existe une orbite périodique, alors le point d'équilibre intérieur est un centre (entouré d'orbites périodiques).
- S'il n'existe pas de point fixe intérieur, alors toutes les orbites convergent vers la frontière.

Si l'on associe Ω_m à x et Ω_Λ à y pour plus de clarté, le système (2.15) devient :

$$\begin{cases} x' = x [(1 + 3\omega)x - 2y - (1 + 3\omega)] , \\ y' = y [(1 + 3\omega)x - 2y + 2] . \end{cases}$$

avec x et y dans le segment $[0, 1 - \Omega_k]$.

On peut remarquer que les séparatrices sont parallèles, il n'y pas de point fixe à l'intérieur de \mathbb{R}_+^2 . Donc, toutes les orbites vont converger vers la frontière. On sait de plus qu'il n'y aura pas de cycle limite dans notre système car nous sommes bien en présence d'équations de type Lotka-Volterra de dimension 2. Les séparatrices sont données par :

$$\begin{cases} f_1(x, y) \equiv (1 + 3\omega)x - 2y - (1 + 3\omega) = 0 \\ f_2(x, y) \equiv (1 + 3\omega)x - 2y + 2 = 0 \end{cases}$$

La croissance de ces droites dépend de la valeur de ω . On peut également remarquer qu'en dessous de f_1 , \dot{x} sera positif, il sera négatif au-dessus de cette droite. De même, \dot{y} sera positif en dessous de f_2 et positif au-dessus. Les droites passent respectivement par

- $(1, 0)$ et $\left(0, -\frac{(1 + 3\omega)}{2}\right)$ pour f_1 ,
- $(0, 1)$ et $\left(-\frac{2}{(1 + 3\omega)}, 0\right)$ pour f_2 .

1. Un cycle limite est une trajectoire fermée dans l'espace des phases, telle qu'au moins une autre trajectoire spirale autour lorsque le temps tend vers l'infini [16].

On peut analyser la situation en fonctions de ω .

(a) Si $\omega = -1$ alors les séparatrices sont confondues. Elles passent par $(0, 1)$ et $(1, 0)$. En dessous de cette droite, \dot{x} et \dot{y} sont positifs, ils sont tous les deux négatifs au-dessus. On a déjà signalé que dans ce cas, l'Univers de Milne est instable, cependant on ne pouvait rien dire des Univers de de Sitter et d'Einstein-de Sitter. Nous allons à présent montrer que l'Univers de de Sitter est stable, au sens de Lyapunov, en utilisant le théorème suivant [16]

Théorème 2 *Soit le système $\dot{x} = f(x)$ et soit E un ensemble ouvert de \mathbb{R}^n contenant x_0 . Supposons que $f \in \mathcal{C}^1$ et $f(x_0) = 0$. Supposons de plus qu'il existe une fonction à valeurs réelles $V \in \mathcal{C}^1(E)$ telle que $V(x_0) = 0$ et $V(x) > 0$ pour $x \neq x_0$.*

Alors

- *si $\dot{V}(x) \leq 0 \forall x \in E$, x_0 est stable ;*
- *si $\dot{V}(x) < 0 \forall x \in E$, x_0 est asymptotiquement stable ;*
- *si $\dot{V}(x) > 0 \forall x \in E$, x_0 est instable.*

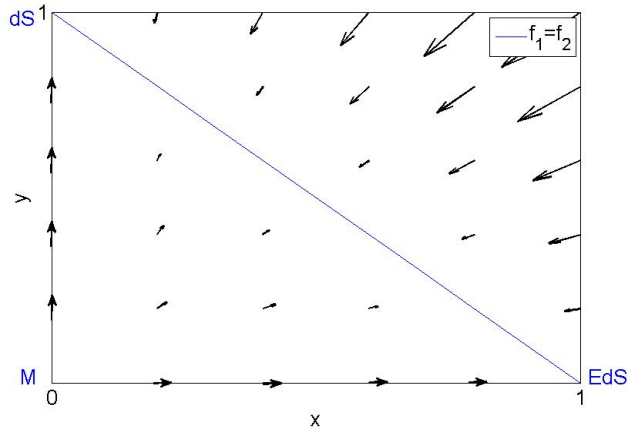
De plus, si $\dot{V}(x) = 0 \forall x \in E$, alors les trajectoires se trouvent sur les surfaces de \mathbb{R}^n définies par $V(x) = c$.

Une telle fonction V est appelée fonction de Lyapunov. Un point x est stable au sens de Lyapunov si tous les points proches de x au départ, restent proches.

Choisissons

$$V(x, y) = \frac{x}{y},$$

cette fonction vérifie les hypothèses du théorème précédent pour $x_0 = (0, 1)$ et $E = [0, 1] \times]0, 1]$, de plus $\dot{V}(x, y) = 0 \forall (x, y) \in E$. Donc le point $(0, 1)$, Univers de de Sitter, est stable au sens de Lyapunov. On peut également signaler que les trajectoires se trouveront sur les droites d'équation $y = cx$. On retrouve ce comportement sur le portrait de phase suivant :

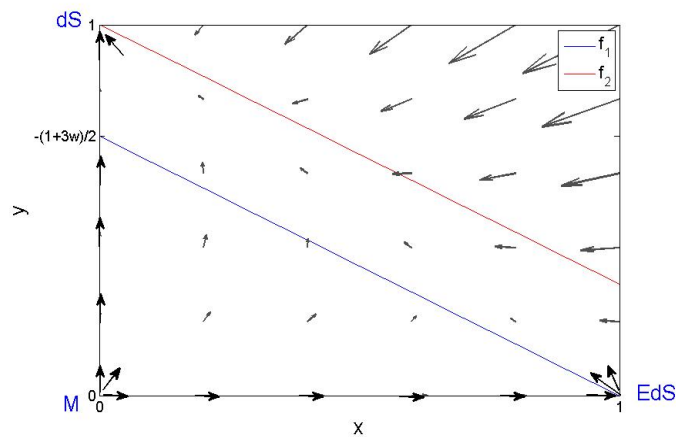
FIGURE 2.5 – Portrait de phase de l'Univers homogène isotrope pour $\omega = -1$.

Si notre condition initiale ne se trouve pas sur un axe, alors les orbites sont sur les droites $y = cx$, elles se rapprochent de la séparatrice qui est un équilibre du système.

(b) Si $-1 < \omega < -\frac{1}{3}$ alors les séparatrices sont décroissantes. On a

$$-\frac{(1+3\omega)}{2} < 1 \text{ et } -\frac{2}{(1+3\omega)} > 1.$$

Dans ce cas, l'Univers de Milne est instable, l'Univers d'Einstein-de Sitter est un point de selle et celui de de Sitter est stable. En dessous de f_1 , \dot{x} sera positif, il sera négatif au-dessus de cette droite. \dot{y} sera positif en dessous de f_2 et négatif au-dessus. La situation est représentée sur la figure suivante :

FIGURE 2.6 – Portrait de phase de l'Univers homogène isotrope pour $\omega = -0.8$.

Tous les points se dirigent vers l'Univers de de Sitter, sauf ceux qui se trouvent à la base sur l'axe x , ils se dirigent vers l'Univers d'Einstein-de Sitter.

(c) Si $\omega = -\frac{1}{3}$, alors l'Univers de de Sitter est stable mais on ne peut rien conclure sur les deux autres équilibres. Cependant, en remplaçant ω par sa valeur dans (2.15), on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = -2xy \\ \dot{y} = y(-2y + 2) \end{cases}$$

qui est facilement intégrable. La solution est donnée par

$$x(t) = \frac{k_1}{e^{2(k_2+t)}}, \quad y(t) = -\frac{e^{2(k_1+t)}}{1 - e^{2(k_1+t)}}.$$

Lorsque $t \rightarrow +\infty$ alors $x(t) \rightarrow 0$ et $y(t) \rightarrow 1$. On retrouve le caractère attracteur de l'Univers de de Sitter, le portrait de phase est représenté sur la figure ci-dessous.

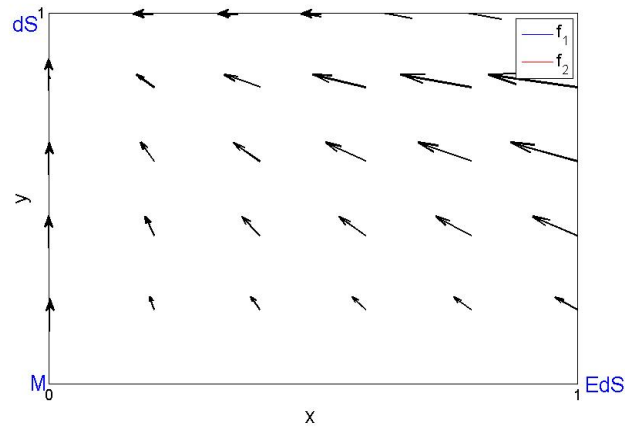
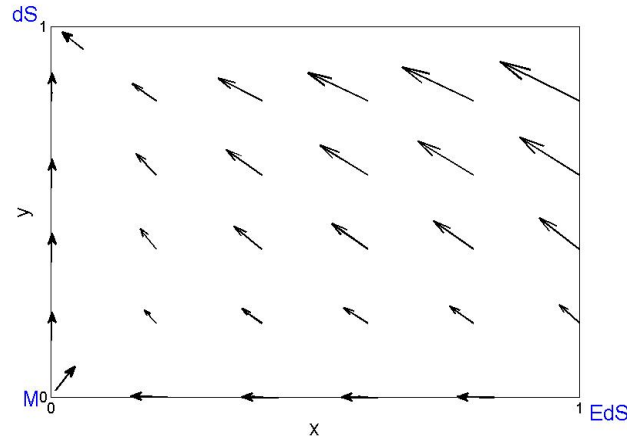


FIGURE 2.7 – Portrait de phase de l'Univers homogène isotrope pour $\omega = -1/3$.

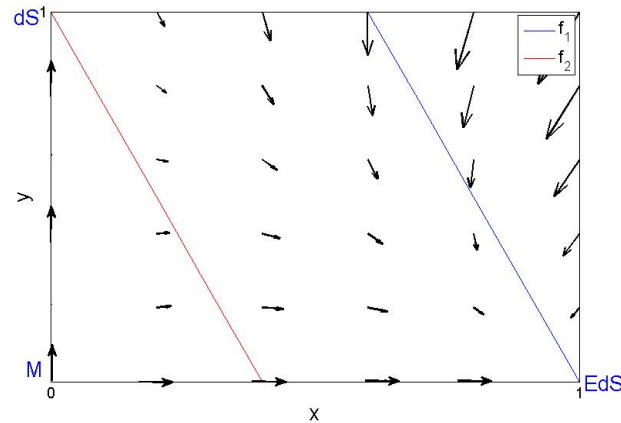
(d) Si $-\frac{1}{3} < \omega \leq 1$, alors les séparatrices sont croissantes. Elles sont tangentes à notre domaine puisqu'elles passent respectivement par $(0, 1)$ et $(1, 0)$. Un point de $[0, 1] \times [0, 1]$ se trouve donc en dessous de f_2 et au-dessus de f_1 ce qui signifie que \dot{x} est négatif et \dot{y} est positif. On a vu que dans ce cas, l'Univers de Milne était un point de selle, celui d'Einstein-de Sitter est instable, et l'Univers de de Sitter est toujours le seul stable. On remarque sur le graphique suivant que tous les points se dirigent vers cet Univers stable, sauf ceux se trouvant sur l'axe x au départ qui vont se diriger vers l'Univers de Milne.

FIGURE 2.8 – Portrait de phase de l'Univers homogène isotrope pour $\omega = 0.8$.

A l'exception des conditions initiales sur l'axe x , la constante cosmologique est destinée à dominer l'Univers au détriment de tout autre élément. Dans notre étude, nous avons considéré des valeurs de ω comprises entre -1 et 1 . Ce sont les seules valeurs obtenues par calcul lorsque l'on considère différents types d'éléments. Cependant, certains astrophysiciens considèrent une espèce qu'ils nomment "énergie noire fantôme" et à laquelle ils attribuent une valeur de ω inférieure à -1 . Dans ce cas, l'étude des valeurs propres du système linéarisé nous indique que

- l'Univers de Milne a deux valeurs propres positives, il est instable, c'est une source.
- l'Univers d'Einstein-de Sitter a deux valeurs propres négatives, il est stable, c'est un puits. L'énergie noire fantôme va, après un certain temps, dominer.
- l'Univers de de Sitter a une valeur propre positive et une négative, c'est un point de selle.

Le portrait de phase de cette situation est représenté sur le graphique ci-dessous.

FIGURE 2.9 – Portrait de phase de l'Univers homogène isotrope pour $\omega = -2$.

On peut remarquer que dans cette situation particulière, où l'on considère de "l'énergie noire fantôme", la constante cosmologique n'est plus un attracteur (sauf s'il n'y a que de la constante cosmologique au départ). C'est l'Univers d'Einstein-de Sitter qui devient l'attracteur avec (attention) un $\omega < -1$. Dans ce cas, l'intégration des équations du mouvement donne

$$a(t) = \left(\frac{\gamma}{c_0}\right)^\gamma \frac{1}{(t_0 - t)^\gamma} \quad \text{avec } t < t_0 \quad \text{et} \quad \gamma := \left|\frac{2}{3(1 + \omega)}\right|.$$

En considérant de l'énergie noire fantôme, on obtient ce que l'on appelle un Big Rip. Lorsque t tend vers t_0 , une singularité apparaît dans le facteur d'échelle et cela induit une force infinie. Donc l'Univers devient infini en un temps fini, c'est la grande déchirure. Cette énergie noire fantôme joue un rôle encore plus répulsif que la constante cosmologique et accélère encore plus l'expansion de l'Univers...

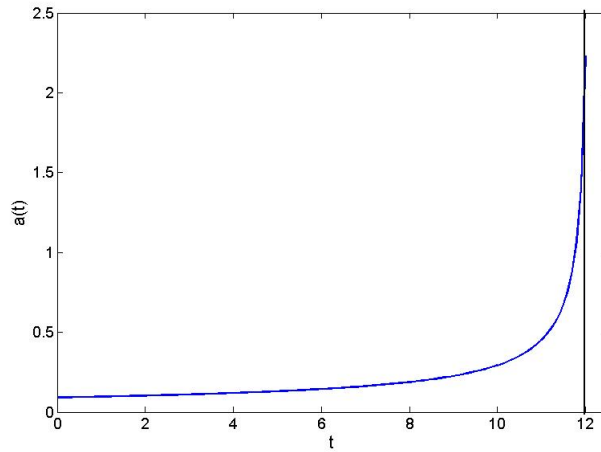


FIGURE 2.10 – Représentation du Big Rip, $t_0 = 12$, $\omega = -2$

2.3 Généralisation du modèle à plus de deux espèces

La différence avec le premier modèle, consiste dans le fait que nous allons à présent considérer plusieurs espèces simultanément. Précédemment, nous avons signalé que le paramètre ω était constant par morceaux, nous considérions seulement l'espèce dominante. Nous allons maintenant supposer que l'Univers est rempli de plusieurs espèces qui n'interagissent pas. On associe à chacune d'entre elle un fluide barotropique. Le cas des interactions entre espèces est abordé au chapitre suivant où nous introduisons un couplage.

Nous allons, dans ce modèle, poser $\Lambda = 0$ et le remplacer par de l'énergie noire, notée *de* (pour dark energy). Nous avons déjà signalé que l'énergie noire est le fluide qui permet l'accélération de l'Univers, mathématiquement cela revient à considérer $\ddot{a} > 0$. Si l'on regarde l'équation d'évolution de ce facteur d'échelle (1.18)

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p)$$

alors on remarque que la condition à vérifier pour avoir une accélération est

$$\rho + 3p < 0 \Leftrightarrow \omega < -\frac{1}{3}.$$

L'énergie noire est donc caractérisée par $\omega_{de} \in [-1, -1/3]$. Nous verrons que lorsque l'on choisit $\omega_{de} = -1$, on retrouve les équations obtenues en considérant de la constante cosmologique.

Considérons donc un Univers contenant, de la matière noire dm , de la radiation r et de l'énergie sombre de . La densité totale d'énergie est égale à la somme des densités

$$\rho = \rho_{dm} + \rho_r + \rho_{de}.$$

On peut, comme précédemment, écrire les équations de Friedmann-Lemaître en fonction des paramètres de densité Ω , l'équation (1.19) devient

$$\Omega_{dm} + \Omega_r + \Omega_{de} + \Omega_k = 1.$$

On a vu que ω vaut 0 pour la matière, $1/3$ pour les radiations et ω_{de} pour l'énergie noire, en insérant ces valeurs dans (2.11), on obtient

$$q = \frac{1}{2}(\Omega_{dm} + 2\Omega_r + \Omega_{de}(1 + 3\omega_{de})).$$

En choisissant $\omega_{de} = -1$ et en utilisant (2.14)

$$\Omega'_i = \Omega_i[-3(1 + \omega_i) + 2q + 2],$$

on déduit le système dynamique suivant :

$$\begin{cases} \Omega'_{dm} &= \Omega_{dm}[\Omega_{dm} + 2\Omega_r - 2\Omega_{de} - 1] \\ \Omega'_r &= \Omega_r[\Omega_{dm} + 2\Omega_r - 2\Omega_{de} - 2] \\ \Omega'_{de} &= \Omega_{de}[\Omega_{dm} + 2\Omega_r - 2\Omega_{de} + 2] \\ 1 &= \Omega_{dm} + \Omega_r + \Omega_{de} + \Omega_k. \end{cases}$$

L'étude des équilibres de ce système est similaire à celle du modèle précédent. L'introduction de plusieurs espèces ne change pas la dynamique. On ne trouve toujours pas d'équilibre interne au système, les seuls points fixes sont situés sur les axes. On peut regarder la stabilité des quatre équilibres de ce modèle, avec

$$X = \begin{pmatrix} \Omega_{dm} \\ \Omega_r \\ \Omega_{de} \end{pmatrix},$$

les équilibres sont

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Le premier équilibre $(0, 0, 0)$ correspond à l'Univers de Milne ne contenant que de la courbure. L'étude des valeurs propres du système linéarisé nous indique que celui-ci est un point de selle. Le second point fixe $(1, 0, 0)$ est l'Univers d'Einstein-de Sitter rempli de matière, c'est également un point de selle. L'Univers de radiations $(0, 1, 0)$ représente également l'Univers d'Einstein-de Sitter mais dans ce cas, celui-ci est instable. L'Univers de de Sitter $(0, 0, 1)$, ne contenant que de l'énergie noire, est le seul équilibre stable du système.

On retrouve donc bien la même dynamique que précédemment même en considérant les espèces en cohabitation sans interaction dans l'Univers. Comme nous l'avons déjà souligné, seule la présence "d'énergie noire fantôme" permet de dominer l'énergie noire. Regardons si cette hypothèse est toujours vérifiée dans ce modèle. L'insertion "d'énergie noire fantôme", Ω_F , dans les équations nous donne un nouveau système :

$$\begin{cases} \Omega'_{dm} = \Omega_{dm}[\Omega_{dm} + 2\Omega_r - 2\Omega_{de} - 5\Omega_F - 1] \\ \Omega'_r = \Omega_r[\Omega_{dm} + 2\Omega_r - 2\Omega_{de} - 5\Omega_F - 2] \\ \Omega'_{de} = \Omega_{de}[\Omega_{dm} + 2\Omega_r - 2\Omega_{de} - 5\Omega_F + 2] \\ \Omega'_F = \Omega_F[\Omega_{dm} + 2\Omega_r - 2\Omega_{de} - 5\Omega_F + 5] \\ 1 = \Omega_{dm} + \Omega_r + \Omega_{de} + \Omega_F + \Omega_k. \end{cases}$$

On considère à présent $X = (\Omega_{dm}, \Omega_r, \Omega_{de}, \Omega_F)$. Dans cette situation, on retrouve l'instabilité de l'Univers de radiations $(0, 1, 0, 0)$. Les points $(0, 0, 0, 0)$, $(1, 0, 0, 0)$ et $(0, 0, 1, 0)$ sont des points de selle, l'Univers de de Sitter n'est plus un attracteur. L'unique attracteur de ce système est l'Univers ne contenant que de l'énergie noire fantôme $(0, 0, 0, 1)$. Il semblerait que la présence d'énergie noire fantôme amène notre Univers vers un Big Rip.

2.4 L'Univers comme un système proie-prédateur : interprétation

Nous avons vu que les équations de Friedmann-Lemaître peuvent s'écrire sous forme d'un modèle de Lotka-Volterra. Les différents fluides contenus dans l'Univers sont en compétition. Mais que se disputent-ils ?

On peut en fait considérer que les fluides “mangent” le paramètre de densité de courbure. En effet, lorsqu'un paramètre diminue, c'est la densité de courbure qui va s'ajuster afin de garder la somme des paramètres de densité constante. Ce paramètre de densité de courbure est le seul qui peut être négatif, plus les autres paramètres augmentent, plus ce dernier devient négatif.

Chapitre 3

Mise en évidence d'un nouvel Univers et approches envisagées

L'analyse du modèle standard de la cosmologie nous a montré qu'il n'y avait pas de co-existence possible entre les espèces. Dans chaque situation, seule une espèce va survivre et conduira notre Univers vers un destin dépendant de cette espèce. Dans ce modèle, l'énergie noire va dominer l'Univers (ou l'énergie noire fantôme si celle-ci est présente à partir d'un moment donné) et celui-ci va s'étendre indéfiniment et de plus en plus rapidement (il atteindra même une dimension infinie en un temps fini en présence d'énergie noire fantôme).

La question qui se pose alors est de savoir ce que l'on pourrait modifier dans le modèle pour éviter cette situation. Une solution possible est d'envisager un couplage entre espèces. C'est ce que nous allons faire dans ce chapitre. Nous verrons que l'insertion d'un couplage entre la matière noire et l'énergie noire permet la coexistence de ces deux espèces. Il faut cependant noter que le couplage introduit dans ce chapitre est effectif, il existe plusieurs approches de couplage.

La fin de ce travail se concentre sur la recherche d'une formulation hamiltonienne des équations de Friedmann-Lemaître.

3.1 Insertion d'un couplage dans le modèle standard

Les propriétés peu connues des composantes sombres de l'Univers nous permettent d'imaginer que ces composantes soient couplées ; un couplage entre deux fluides signifie que ceux-ci vont échanger de l'énergie et se transformer l'un en l'autre. On peut alors introduire, "à la main" un couplage entre la matière noire et l'énergie noire. Celui-ci revient à modifier l'équation de la dérivée de la densité d'énergie (1.22) :

$$\dot{\rho}_i = -3H\rho_i(1 + \omega_i)$$

sans que cela ne se remarque (la densité d'énergie totale est conservée). Supposons qu'il existe un couplage β entre les espèces X et Y , on obtient alors :

$$\dot{\rho}_X = -3H\rho_X(1 + \omega_X) + \beta\rho_X,$$

$$\dot{\rho}_Y = -3H\rho_Y(1 + \omega_Y) - \beta\rho_X.$$

En dérivant l'équation des paramètres de densité (2.6)

$$\Omega_i = \frac{8\pi G}{3H^2}\rho_i, \quad (i = b, dm, r, de)$$

on obtient

$$\dot{\Omega}_i = \frac{8\pi G}{3H^2} \left(\dot{\rho}_i - 2\frac{\dot{H}}{H}\rho_i \right).$$

On sépare à présent la matière en deux parties, une partie matière noire dm et une partie matière baryonique b pour insérer un couplage entre la matière noire et l'énergie noire. On obtient alors le système dynamique suivant

$$\begin{cases} \Omega'_b &= \Omega_b[\Omega_b + \Omega_{dm} + 2\Omega_r - 2\Omega_{de} - 1] \\ \Omega'_{dm} &= \Omega_{dm}[\Omega_b + \Omega_{dm} + 2\Omega_r + \Omega_{de}(\epsilon - 2) - 1] \\ \Omega'_r &= \Omega_r[\Omega_b + \Omega_{dm} + 2\Omega_r - 2\Omega_{de} - 2] \\ \Omega'_{de} &= \Omega_{de}[\Omega_b + \Omega_{dm}(1 - \epsilon) + 2\Omega_r - 2\Omega_{de} + 2] \\ 1 &= \Omega_b + \Omega_{dm} + \Omega_r + \Omega_{de} + \Omega_k. \end{cases} \quad (3.1)$$

où l'on a posé $\beta = \epsilon\Omega_{de}H$ pour retrouver un système de la forme Lotka-Volterra.

3.1.1 Analyse des équilibres du système

L'étude des équilibres et de la stabilité du système se fait toujours de la même façon. On considère le vecteur

$$X = \begin{pmatrix} \Omega_b \\ \Omega_{dm} \\ \Omega_r \\ \Omega_{de} \end{pmatrix},$$

on met alors rapidement en évidence que :

- l'Univers de Milne $X_M = (0, 0, 0, 0)$ qui est un point de selle
- l'Univers d'Einstein-de Sitter ($\omega = 1$) $X_{EdS} = (\Omega_b, 1 - \Omega_b, 0, 0)$ pour lequel il existe des valeurs propres à partie réelle nulle,
- l'Univers d'Einstein-de Sitter ($\omega = 1/3$) $X_{EdS} = (0, 0, 1, 0)$ qui est un nœud instable,
- l'Univers de de Sitter $X_{dS} = (0, 0, 0, 1)$ qui est un puits stable pour un paramètre de couplage $\epsilon < 3$ et devient un point de selle lorsque $\epsilon > 3$
- le couplage entraîne l'existence d'un nouveau point d'équilibre $X_c = (0, 2/\epsilon, 0, 1/\epsilon)$. Ce dernier est un point de selle si $\epsilon < 3$ mais lorsque $\epsilon > 3$ il existe des valeurs propres correspondantes à partie réelle nulle et on ne sait plus rien conclure de sa stabilité en étudiant le système linéarisé.

Nous allons nous intéresser à ce nouvel équilibre car c'est la première fois que l'on trouve un point qui permet la coexistence de deux espèces. Regardons ce qu'il se passe au voisinage de X_c . Il semblerait que, si le couplage n'est pas trop important ($\epsilon < 3$), alors notre Univers se dirige vers l'Univers de de Sitter ne contenant que de l'énergie noire. Mais si maintenant le couplage entre l'énergie noire et la matière noire est suffisant, $\epsilon > 3$, nous remarquons graphiquement une oscillation entre ces deux fluides (en prenant une condition initiale proche de X_c). De nouveau, le paramètre de densité de courbure va s'adapter afin de garder la somme des paramètres constante. Les graphiques suivants illustrent cette dernière situation où le couplage entre l'énergie noire et la matière noire permet l'oscillation.

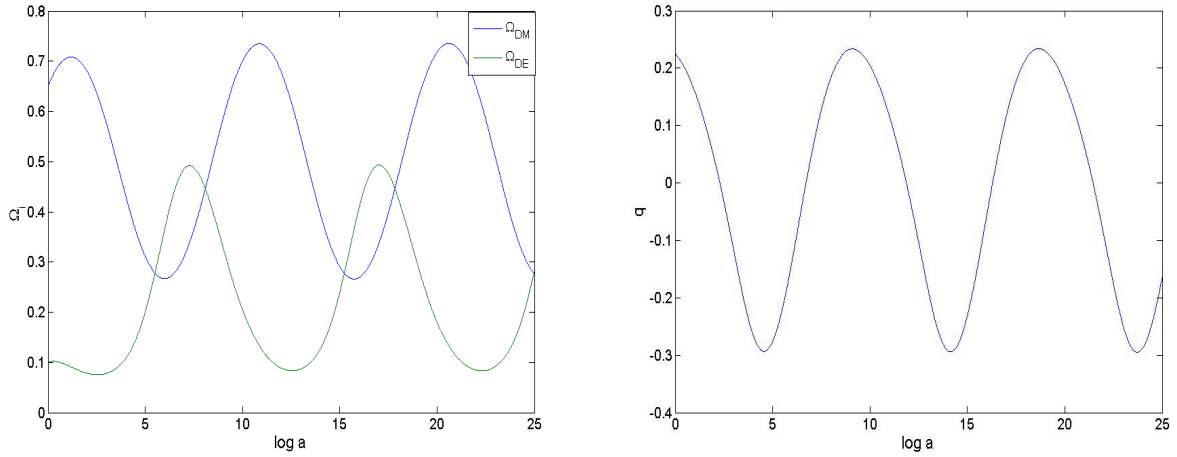


FIGURE 3.1 – Evolution des Ω_i (gauche) et du paramètre de décélération (droite) au cours du temps pour un couplage $\epsilon = 4$ et $X_0 = (0, 2/\epsilon + 0.15, 0, 1/\epsilon - 0.15)$

On peut remarquer que lorsque la matière noire domine, alors l'Univers est en expansion décélérée ($q < 0$), mais lorsque l'énergie noire reprend le dessus, l'expansion s'accélère ($q > 0$). Dans ce modèle oscillant, l'accélération cosmique est un phénomène oscillatoire et périodique qui ne s'atténue jamais. On trouve généralement des modèles d'accélération oscillants amortis mais pas périodiques...

Si l'on interprète ces résultats en tant que système proie-prédateur, on peut remarquer que dans ce modèle, énergie noire et matière noire sont en compétition pour une ressource limitée : la courbure. Les deux fluides vont, tour à tour, dominer l'Univers. Nous appellerons ce modèle "le Big Boogie", ce nom dansant rappelle le caractère oscillant du modèle.

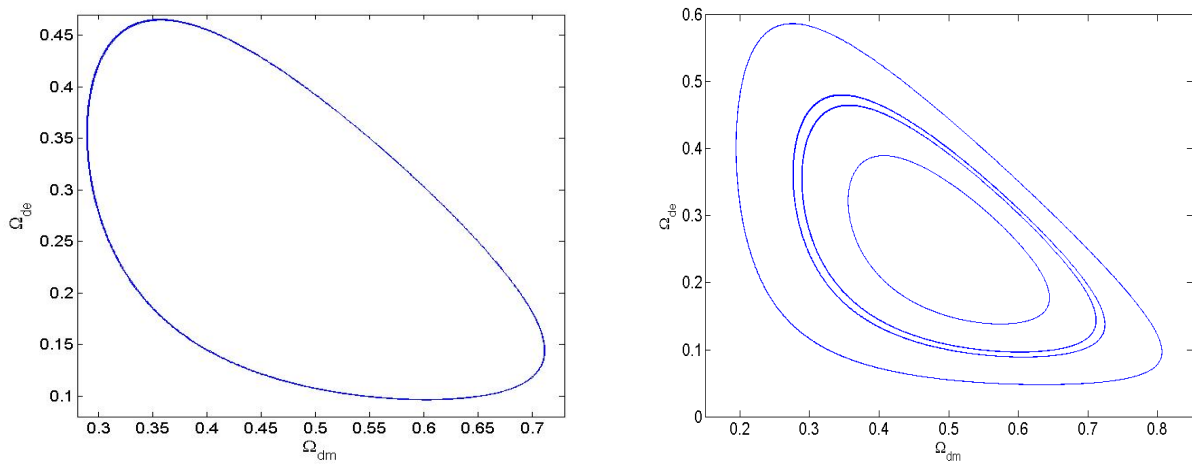


FIGURE 3.2 – Oscillation de Ω_{dm} et Ω_{de} pour un couplage $\epsilon = 4$. A gauche, $X_0 = (0, 2/\epsilon + 0.15, 0, 1/\epsilon - 0.15)$, différents X_0 à droite.

Lorsque l'on prend un couplage $\epsilon > 3$ et que l'on part d'une condition initiale proche de X_c , dans le plan $(\Omega_{dm}, \Omega_{de})$ alors on remarque numériquement que le point d'équilibre intérieur est entouré d'orbites. Toujours numériquement, en prenant une condition initiale pas trop éloignée du plan $(\Omega_{dm}, \Omega_{de})$, on se rapproche de ce plan. On peut en effet voir sur la figure suivante qu'après un court instant, Ω_r et Ω_b reprennent des valeurs proches de 0. On retrouve le comportement périodique des composantes sombres.

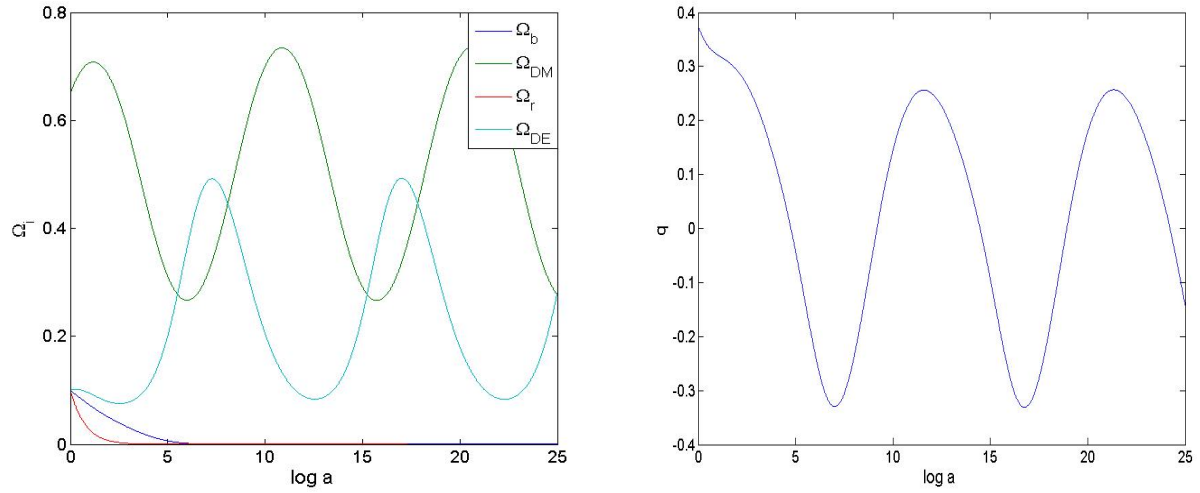


FIGURE 3.3 – Evolution des Ω_i au cours du temps pour un couplage $\epsilon = 4$ et $X_0 = (0.1, 2/\epsilon + 0.15, 0.1, 1/\epsilon - 0.15)$

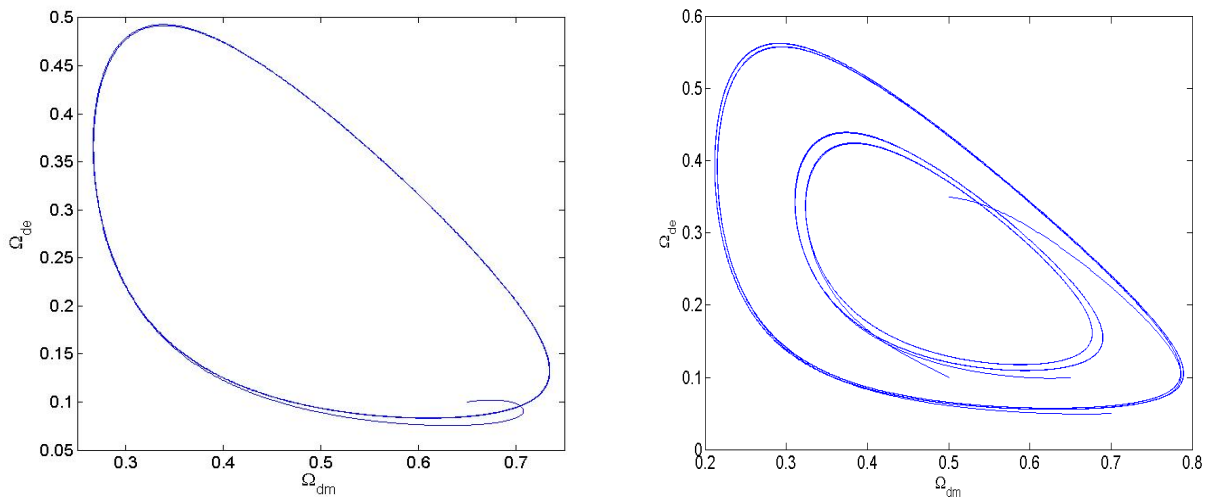


FIGURE 3.4 – Oscillation de Ω_{dm} et Ω_{de} pour un couplage $\epsilon = 4$. A gauche, $X_0 = (0.1, 2/\epsilon + 0.15, 0.1, 1/\epsilon - 0.15)$ et différents X_0 à droite.

Nous aimerions déterminer le caractère périodique ou non des orbites de ces graphiques et de vérifier si les solutions de ce système sont bornées. Afin d'étudier la dynamique complète de ce système, nous voudrions trouver un hamiltonien. Si l'on peut insérer le couplage dans cet hamiltonien, alors l'étude du système sera réalisable. La suite de ce travail est consacrée à la recherche d'un hamiltonien correspondant à notre système, celui-ci est calculé sans couplage.

3.2 Formulation hamiltonienne du problème : pistes envisagées

3.2.1 Rappel du formalisme hamiltonien

Dans un système dynamique, les équations du mouvement peuvent être décrites par des coordonnées généralisées $\{q_i\}$ et des vitesses correspondantes $\{\dot{q}_i\}$. On a alors une fonction qui dépend de ces coordonnées et du temps, le lagrangien $\mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t)$ avec $i = 1..N$ et N est le nombre de degrés de liberté. Dans ce formalisme, les équations du mouvement peuvent être obtenues à partir des équations d'Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0.$$

Pour passer au formalisme hamiltonien, on pose

$$p_i := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}$$

qui correspond à la quantité de mouvement associée à la vitesse généralisée \dot{q}_i . L'hamiltonien \mathcal{H} est donné par la transformée de Legendre du lagrangien :

$$\mathcal{H}(q_i, p_i, t) = \sum_k^N \dot{q}_k p_k - \mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t).$$

Les équations du mouvement de Hamilton vont dès lors décrire la dynamique du système, elles sont données par

$$\dot{q}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i}; \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i}; \quad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = \frac{d\mathcal{H}}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}.$$

et

$$\frac{dq_i}{dq_j} = \frac{dp_i}{dp_j} = \delta_i^j, \quad \frac{dq_i}{dp_j} = \frac{dp_i}{dq_j} = 0.$$

3.2.2 Première approche : système sous forme Lotka-Volterra

Pour déterminer un hamiltonien, la première solution est de considérer notre système sous forme Lotka-Volterra (3.1) car c'est dans celui-ci que nous avons inséré le couplage.

Différents articles existent et traitent de ce sujet, mais il semblerait que notre système ne remplisse pas les conditions nécessaires pour être hamiltonien.

Notre système (3.1) peut également s'écrire

$$x'_i = x_i(b_i + \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j),$$

où la matrice A est la matrice d'interaction du système. Les conditions pour que le système soit hamiltonien sont alors [18]

- $Ax^* = -b$ (x^* est un point fixe intérieur),
- la matrice A est antisymétrique.

Dans notre système, la matrice d'interaction est donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & \epsilon - 2 \\ 1 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 - \epsilon & 2 & -2 \end{pmatrix},$$

elle n'est pas antisymétrique. De plus notre point d'équilibre X_c n'est pas un point intérieur à \mathbb{R}_+^4 car $\Omega_b = \Omega_r = 0$.

Il faut donc trouver un autre moyen pour déterminer un hamiltonien. La solution que nous avons envisagée est de revenir aux équations de Friedmann-Lemaître et de voir si nous avons plus de chance.

3.2.3 Seconde approche : hamiltonien des équations de Friedmann-Lemaître

Nous cherchons donc une formulation hamiltonienne des équations de Friedmann-Lemaître. Dans [6], une solution est proposée. Si l'on pose

$$8\pi G = c^2 = 1, \quad \theta = 3\frac{\dot{a}}{a}, \quad \text{et} \quad \gamma = \omega + 1,$$

alors les équations de Friedmann-Lemaître deviennent

$$(1.18) \longrightarrow \dot{\theta} + \frac{1}{3}\theta^2 + \frac{1}{2}(3\gamma - 2)\rho = 0,$$

$$(1.19) \longrightarrow \frac{1}{3}\theta^2 = \rho - \frac{3k}{a^2},$$

$$(1.22) \longrightarrow \dot{\rho} + \gamma\rho\theta = 0.$$

En choisissant l'hamiltonien

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}p^2 - \frac{1}{6}b^{3\gamma}q^{(2-3\gamma)}$$

avec

$$\begin{cases} p = \frac{1}{3}b\theta\rho^{-1/3\gamma}, \\ q = b\rho^{-1/3\gamma} \end{cases}$$

et b un paramètre arbitraire, on retrouve les équations de Friedmann-Lemaître en appliquant les relations du mouvement de la formulation hamiltonienne. En effet,

$$\begin{aligned} \dot{q} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} = p &\Leftrightarrow b \left(-\frac{1}{3\gamma} \right) \rho^{(-\frac{1}{3\gamma}-1)} \dot{\rho} = \frac{1}{3}b\theta\rho^{-\frac{1}{3\gamma}} \\ &\Leftrightarrow \dot{\rho} = -\gamma\rho\theta. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{p} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q} &\Leftrightarrow \frac{1}{3}b(\dot{\theta}\rho^{-\frac{1}{3\gamma}} - \frac{1}{3\gamma}\theta\rho^{-\frac{1}{3\gamma}-1}\dot{\rho}) = \frac{1}{6}b^{3\gamma}(2-3\gamma)q^{(1-3\gamma)} \\ &\Leftrightarrow \dot{\theta} + \frac{1}{3}\theta^2 - \frac{1}{2}(2-3\gamma)\rho = 0. \end{aligned}$$

A partir de cet hamiltonien, on retrouve les équations de Friedmann-Lemaître. Le problème est que les variables p et q ne sont pas indépendantes. Nous ne sommes donc pas dans une formulation hamiltonienne classique. Nous nous voyons dès lors obligés d'oublier cette solution.

Trouver un hamiltonien à partir des équations de Friedmann-Lemaître ne paraît pas être très évident. Nous allons donc remonter encore un peu dans les équations et essayer de déterminer un lagrangien directement à partir de la métrique. De ce lagrangien, nous pourrons alors dériver un hamiltonien.

3.2.4 Troisième approche : lagrangien des équations de Friedmann-Lemaître

Le problème des 2 corps

A partir d'une métrique, on peut dériver un lagrangien afin de retrouver les équations du mouvement. Le raisonnement suivant vient d'un exercice du cours de gravitation proposé lors d'un examen [10].

Dans ce problème, on considère un espace infini contenant 2 corps à symétrie sphérique, de masses M et m avec $M \gg m$. La métrique de cette situation est celle de Schwarzschild

$$ds^2 = f(r)c^2dt^2 - \frac{dr^2}{f(r)} - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$$

avec $f(r) = 1 + \frac{2\Psi(r)}{c^2}$ et $\Psi(r) := -\frac{GM}{r}$ un champ classique.

A partir de cette métrique, on peut calculer un lagrangien

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2f(r)}m \left(\frac{dr}{ds} \right)^2 + \frac{1}{2}mr^2 \left(\frac{d\theta}{ds} \right)^2 - \frac{1}{2}mf(r) \left(\frac{dt}{ds} \right)^2.$$

Le mouvement s'effectuant toujours dans un plan, les variations $d\phi$ sont nulles. De plus le lagrangien ne dépend ni de θ ni de t , ces variables fournissent des intégrales premières qui nous permettent de retrouver les équations du mouvement :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} &= 0 \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t'} &= -mf(r)t' = mk_1 \text{ avec } k'_1 = 0 \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} &= 0 \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta'} &= -mr^2\theta' = mk_2 \text{ avec } k'_2 = 0
\end{aligned}$$

En faisant le rapport de ces deux constantes, on retrouve la loi des aires

$$\begin{aligned}
\frac{k_2}{k_1} &= -\frac{r^2}{f(r)} \frac{d\theta}{ds} \frac{ds}{d\theta} \\
\Rightarrow r^2 \frac{d\theta}{ds} &= -f(r) \frac{k_2}{k_1}.
\end{aligned}$$

On peut donc retrouver les équations du mouvement à partir de la métrique du problème.

Application à notre problème

Pour dériver les équations d'Einstein, nous avons utilisé la métrique de FLRW sous la forme suivante :

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right].$$

La partie cinétique du lagrangien est donnée par

$$\begin{aligned}
L_c &= \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dx^\nu}{dt} \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{dt}{ds} \right)^2 - \frac{a(t)^2}{2(1 - kr^2)} \left(\frac{dr}{ds} \right)^2 - \frac{a(t)^2 r^2}{2} \left(\frac{d\theta}{ds} \right)^2 - \frac{a(t)^2 r^2}{2} \sin^2 \theta \left(\frac{d\phi}{ds} \right)^2.
\end{aligned}$$

Il reste à calculer la partie potentielle de ce lagrangien.

En relativité générale, le champ gravitationnel est associé à la courbure de l'espace, il faut donc calculer un lagrangien de courbure. Or les indications en notre possession pour déterminer ce lagrangien sont

- la loi de conservation de l'énergie $\dot{\rho} + (\rho + p)\frac{3\dot{a}}{a} = 0$
- la définition du tenseur énergie-impulsion $T_{\mu\nu} \stackrel{[13]}{=} 2 \left(\frac{\partial \mathcal{L}_m}{\partial g^{\mu\nu}} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \mathcal{L}_m \right)$

avec \mathcal{L}_m le lagrangien de matière.

Un candidat vérifiant ces deux conditions est la trace du tenseur énergie-impulsion :

$$\mathcal{L}_m = 3p - \rho$$

avec P la pression et ρ la densité d'énergie. La validité de ce candidat n'est pas triviale et demande quelques manipulations.

Ecrivons

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_m &= p - \rho, \\ &= 4p - (p + \rho), \\ &= g_{\mu\nu} g^{\mu\nu} p - (p + \rho) \frac{u^\mu u^\nu}{c^2} g_{\mu\nu}. \end{aligned}$$

Cette dernière relation s'obtient en notant que

$$\begin{aligned} u^\nu &= g^{\mu\nu} u_\mu, \quad g_{\mu\nu} g^{\mu\nu} = 4 \quad \text{et} \quad u^\mu u_\mu = c^2 \\ \Rightarrow \frac{u^\mu u^\nu}{c^2} g_{\mu\nu} &= 4. \end{aligned}$$

On peut alors calculer le tenseur énergie-impulsion obtenu en utilisant ce lagrangien.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}_m}{\partial g_{\mu\nu}} &= g^{\mu\nu} p - (p + \rho) \frac{u^\mu u^\nu}{c^2}, \\
g^{\mu\nu} \mathcal{L}_m &= g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} g^{\mu\nu} p - g^{\mu\nu} (p + \rho) \frac{u^\mu u^\nu}{c^2} g_{\mu\nu} \\
&= 4g^{\mu\nu} p - 4(p + \rho) \frac{u^\mu u^\nu}{c^2}, \\
T^{\mu\nu} &= 2(g^{\mu\nu} p - (p + \rho) \frac{u^\mu u^\nu}{c^2}) - 4g^{\mu\nu} p + 4(p + \rho) \frac{u^\mu u^\nu}{c^2} \\
&\stackrel{c^2=1}{=} 2(p + \rho) u^\mu u^\nu - 2p g^{\mu\nu}.
\end{aligned}$$

Or nous avons montré dans la section (1.3.2) que cette équation traduit la conservation de l'énergie. Nous avons donc trouvé un lagrangien décrivant notre système

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_c - \mathcal{L}_m.$$

Les équations de Lagrange de ce système sont données par

- $\frac{dt}{ds} = k_1 \quad \text{avec} \quad k'_1 = 0$
- $\frac{a^2}{1 - kr^2} \frac{d^2 r}{ds^2} + \frac{2a}{1 - kr^2} \frac{dr}{ds} \dot{a} k_1 = \frac{a^2 kr}{(1 - kr^2)^2} \left(\frac{dr}{ds} \right)^2 + a^2 r \left(\frac{d\theta}{ds} \right)^2 + a^2 r \sin^2 \theta \left(\frac{d\Phi}{ds} \right)^2$
- $a^2 r^2 \frac{d^2 \theta}{ds^2} + 2ar^2 \frac{d\theta}{ds} \dot{a} k_1 = 2a^2 r^2 \sin \theta \cos \theta \left(\frac{d\theta}{ds} \right)^2$
- $a^2 r^2 \sin^2 \theta \frac{d\Phi}{ds} = k_2 \quad \text{avec} \quad k'_2 = 0.$

On peut retrouver le calcul de ces équations dans l'annexe A. Il est peut-être important de remarquer que le but de ce calcul est de déterminer un hamiltonien pour les équations de Friedmann-Lemaître. Mais lorsque l'on obtient ces équations, on ne trouve pas trivialement les équations du mouvement. En fait, ce développement devrait nous donner les équations des géodésiques dans un Univers de Friedmann-Lemaître et non les équations du champ.

Notre approche n'est pas satisfaisante, certains termes de ces dernières équations ne sont pas transformables et nous sommes loin des deux équations de Friedmann-Lemaître... Nous allons donc continuer notre remontée dans la démarche menant à ces équations et déterminer l'action, sous sa forme la plus générale, qui mène aux équations d'Einstein.

3.3 Formulation hamiltonienne des équations de Friedmann-Lemaître

Dans le premier chapitre, nous introduisons les équations d'Einstein, celles-ci sont issues d'un principe de moindre action. L'action S fait intervenir une densité de lagrangien \mathcal{L} qui contient les sources du mouvement ou des champs en présence. Les équations du champ gravitationnel sont alors l'extremum de l'action obtenu en faisant varier cette action arbitrairement [13].

3.3.1 Détermination d'un lagrangien

La théorie de la relativité est une théorie tensorielle, le choix du système de coordonnées n'influence pas les propriétés de l'espace. Dans la section 1.3.1, nous nous plaçons dans un référentiel synchrone pour déterminer les équations de Friedmann-Lemaître. Nous allons ici considérer un autre repère en introduisant une fonction "lapse" $N(t)$ qui joue le rôle de jauge (dans un référentiel synchrone $N(t) = 1$).

La densité lagrangienne se décompose en une partie Einstein-Hilbert liée à la courbure

$$\mathcal{L}_{eh} = -\frac{R\sqrt{-g}}{12\pi G}$$

et une partie matière qui dans le cas homogène, isotrope et d'un fluide parfait dépend de la densité $\rho(t)$, de la pression $p(t)$ et d'une fonction "lapse" $N(t)$. Dans le cas d'un fluide barotropique $p = \omega\rho$ et \mathcal{L}_m ne dépend plus que de ρ et N .

$$\mathcal{L}_m = \phi(\rho, N) \sqrt{-g}$$

où g représente le déterminant de $g_{\mu\nu}$.

La liberté de jauge des équations de la relativité implique que l'on peut choisir la forme de la fonction lapse $N(t)$. Il est important de conserver la fonction lapse pendant les calculs pour se placer à la fin de ceux-ci dans le référentiel synchrone en posant (par exemple) $N = 1$ et donc $\dot{N} = 0$.

Dans un référentiel quelconque, en posant $8\pi G = c^2 = 1$, la métrique s'écrit

$$ds^2 = N^2(t)dt^2 - a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right]$$

En calculant R et $\sqrt{-g}$ et en posant $a(t) = e^{\alpha(t)}$, on trouve alors

$$S = \int \frac{-r^2 \sin \theta}{\sqrt{1 - kr^2}} e^{3\alpha} \left[\frac{\ddot{\alpha}}{N} + \frac{2\dot{\alpha}}{N} - \frac{\dot{N}\dot{\alpha}}{N^2} + Ne^{-2\alpha}k + \frac{N}{4}\phi(\rho, N) \right] d\Omega$$

où $d\Omega = dVdt$ est l'élément de volume d'espace-temps. La partie spatiale étant séparée de la partie temporelle, on peut l'intégrer et ne considérer que la partie temporelle dans l'action.

Pour dériver les équations de Lagrange, le terme en $\ddot{\alpha}$ ne nous arrange pas. Nous allons donc introduire une jauge afin de le faire disparaître. En notant que

$$\frac{d}{dt} \frac{\dot{\alpha} e^{3\alpha}}{N} = e^{3\alpha} \left(\frac{\ddot{\alpha}}{N} + \frac{3\dot{\alpha}^2}{N} - \frac{\dot{N}\dot{\alpha}}{N^2} \right)$$

on a alors

$$S = \int e^{3\alpha} \left[-\frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{\alpha} e^{3\alpha}}{N} \right) + \frac{\ddot{\alpha}}{N} + \frac{2\dot{\alpha}}{N} - \frac{\dot{N}\dot{\alpha}}{N^2} + Ne^{-2\alpha}k + \frac{N}{4}\phi(\rho, N) \right] dt.$$

Les équations du mouvement s'obtiennent en écrivant $\delta S = 0$, le terme sous la dérivée totale en temps ne contribue donc pas à ces équations, c'est une jauge. L'action s'écrit donc

$$S(\alpha, \dot{\alpha}, \rho, \dot{\rho}, N, \dot{N}) = \int e^{3\alpha} \left(-\frac{\dot{\alpha}^2}{N} + Ne^{-2\alpha}k + \frac{N}{4}\phi(\rho, N) \right) dt.$$

Si, a priori, il y a trois coordonnées généralisées, les équations de Lagrange vont montrer que ρ et a ne sont pas indépendantes. De plus, l'écriture de ces équations nous permet de déterminer la fonction $\phi(\rho, N)$.

Au final, le lagrangien s'écrit

$$\mathcal{L} = e^{3\alpha} \left(-\frac{\dot{\alpha}^2}{N} + Nke^{-2\alpha} + \frac{N\rho}{3}(1 + 2\omega) - \frac{N^2\rho}{3}(1 + \omega) \right)$$

avec $\rho = 3(\dot{\alpha}^2 + kr^{-2\alpha})$.

On peut vérifier que les équations de Lagrange correspondent bien aux équations de Friedmann-Lemaître. Les calculs doivent s'effectuer dans le référentiel général et, en se plaçant finalement dans le repère synchrone, on retrouve les équations du mouvement.

3.3.2 Détermination d'un hamiltonien

Pour déterminer un hamiltonien, nous avons, dans un premier temps, introduit les impulsions p_α et p_N pour éliminer les variables $\dot{\alpha}$ et \dot{N} , ces impulsions sont définies par

$$p_\alpha = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\alpha}} \quad \text{et} \quad p_N = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{N}}.$$

On a alors fait apparaître, “à la main”, la dépendance en \dot{N} cachée dans ρ pour \mathcal{L} en manipulant l'équation de conservation de l'énergie. Après quelques calculs, on obtient un hamiltonien qui, dans le référentiel synchrone, est donné par

$$H = \left[\left(\frac{3p_N}{4} \right)^2 - \left(\frac{p_\alpha}{2} \right)^2 \right] e^{-3\alpha} - e^{3\alpha} \left[k e^{-2\alpha} + \frac{\rho\omega}{3} \right]. \quad (3.2)$$

Cet hamiltonien pose cependant problèmes. La fonction de jauge $N(t)$ n'est pas une variable dynamique du formalisme hamiltonien (c'est un multiplicateur de Lagrange [2]). De plus, en calculant le lagrangien, on fait disparaître \dot{N} donc le réintroduire dans la suite ne paraît pas correct. Il faudrait, ici, repartir sur le formalisme ADM (ou 3+1) [2] qui définit un hamiltonien “sous contraintes” vu que le choix de jauge est arbitraire... La théorie de la relativité générale est lagrangienne, la formulation hamiltonienne de la relativité générale n'est pas triviale.

Chapitre 4

Conclusion et perspectives

Après avoir développé les notions de géométries et défini la cosmologie, nous avons introduit la théorie des modèles proie-prédateur. Ce formalisme nous a permis de mettre en évidence un nouveau modèle d'Univers dans lequel la matière noire et l'énergie noire cohabitent. Dans ce modèle et sous certaines conditions, on constate une oscillation entre les deux fluides, ceux-ci dominant à tour de rôle. Lorsqu'il y a plus de matière que d'énergie noire alors l'expansion de l'Univers est décélérée, elle accélère quand l'énergie noire prend le dessus.

Pour passer des équations de Friedmann-Lemaître au modèle proie-prédateur, on impose que l'équation d'état des fluides cosmologiques soit barotropique. De plus, pour révéler le caractère oscillant, il faut que le paramètre de couplage soit supérieur à 3. Nous avons réalisé les simulations en considérant $\omega_{de} = -1$ c'est à dire en considérant l'énergie noire comme de la constante cosmologique. Nous pouvons nous demander à présent ce qu'il se passera en modifiant le paramètre ω_{de} (graphiquement cette valeur influence le comportement des fluides cosmologiques).

Pour approfondir le sujet, on peut parler de chaos, chercher les conditions pour faire apparaître celui-ci. Nous avons simplement considéré un couplage entre matière et énergie noires. Nous pouvons regarder le comportement des fluides cosmologiques si l'on ajoute de nouveaux couplages.

Afin de valider notre nouveau modèle, il faut encore le comparer aux données disponibles, comme les mesures de supernovae. En cosmologie, on utilise généralement des champs scalaires pour l'étude de la dynamique de l'énergie noire. Nous devons interpréter le couplage que nous avons, ici, inséré dans le modèle proie-prédateur et voir ce à quoi il correspond en théorie des champs.

La dernière étape importante à approfondir est le passage au formalisme hamiltonien. Nous devons analyser le moyen d'insérer un couplage dans cette équation (en jouant sur la forme de la fonction $\phi...$) et déterminer le moyen de l'utiliser pour étudier la dynamique du système.

Le passage des équations de Friedmann-Lemaître au système proie-prédateur nous a donc permis de mettre en évidence un modèle d'Univers aux propriétés originales. En considérant un modèle non couplé seule la constante cosmologique est destinée à survivre et élimine tous ses concurrents. Par contre, l'insertion d'un couplage mène à un Univers dans lequel les composantes sombres cohabitent : le Big Boogie.

Bibliographie

- [1] Le petit larousse illustré, 1996. Dictionnaire Encyclopédique.
- [2] Füzfa A. : *Instabilités gravitationnelles de champs de Yang-Mills et de champs scalaires dans l'univers primordial*. Thèse de doctorat, FUNDP, 2004.
- [3] Füzfa A. : Géométrie différentielle riemannienne et calcul tensoriel. 2010.
- [4] Füzfa A. et Villain L. : Astronomie et mécanique céleste. http://media4.obspm.fr/public/AMC/pages_energie-noire/introduction-energie-noire.html, 2011. [En ligne ; Page disponible le 05-février-2012].
- [5] Harvey A. et Schucking E. : Einstein's mistake and the cosmological constant. <http://adsabs.harvard.edu/abs/2000AmJPh..68..723H>, 1999. [En ligne ; Page disponible le 21-mars-2012].
- [6] Elbaz E., Novello M., Salim J. M., Motta da Silva M. C. et Klippert R. : Hamiltonian formulation of frw equations of cosmology. <http://www.springerlink.com/content/m1162p48174wju8u/fulltext.pdf>. [En ligne ; Page disponible le 4-avril-2012].
- [7] Copeland E.J., Sami M. et Tsujikawa S. : Dynamics of dark energy. 2006.
- [8] Hofbauer J. et Sigmund K. : *The theory of Evolution and Dynamical Systems*. Cambridge University Press, 1988.
- [9] Hofbauer J. et Sigmund K. : *Evolutionary Games and Population Dynamique*. Cambridge University Press, 2003.
- [10] Perez J. : Le problème des 2 corps classique et relativiste, une approche lagangienne, 2001. Ecole Doctorale d'Astronomie et d'Astrophysique d'Ile de France, Examen de Gravitation.
- [11] Perez J. : *Gravitation Classique*. Les Presses de l'ENSTA, 2009.
- [12] Perez J. : L'univers comme un système dynamique. 2009.
- [13] Perez J. : *Théorie des Champs Classiques*. Les Presses de l'ENSTA, 2009.
- [14] Perez J., Chardin G. et Rax J-M. : *Fondements statistiques de la matière*. Les Presses de l'ENSTA, 2010-2011.
- [15] Murray J.D. : *Mathematical Biology, I : An introduction*. Springer, 2002.
- [16] Perko L. : *Differential Equations and Dynamical Systems*. Springer, 2001.
- [17] J. LARENA : *Champs scalaires en cosmologie : Discussions sur les principes d'équivalence et cosmologique*. Thèse de doctorat, Université de Paris VII-Denis Diderot, 2007.

- [18] Plank M. : Hamiltonian structures for the n-dimensional lotka-volterra equations. http://math.bd.psu.edu/faculty/jprevite/dump/JMathPhys_36_3520.pdf. [En ligne ; Page disponible le 4-avril-2012].
- [19] Hobson M.P., Efstathiou G. et Lasenby A.N. : *General Relativity. An introduction for physicists*. Cambridge University Press, 2006.
- [20] Esslinger O. : Astronomie et astrophysique. <http://www.astronomes.com/la-fin-des-etoiles-massives/gravite-acceleration/>. [En ligne ; Page disponible le 28-mars-2012].
- [21] Peter P. et Uzan J.P. : *Cosmologie Primordiale*. Belin, 2005.
- [22] Peebles P.J.E. : The cosmological constant and dark energy. 2002.

Annexe

A. Calcul des équations de Lagrange

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left(\frac{dt}{ds} \right)^2 - \frac{a(t)^2}{2(1-kr^2)} \left(\frac{dr}{ds} \right)^2 - \frac{a(t)^2 r^2}{2} \left(\frac{d\theta}{ds} \right)^2 - \frac{a(t)^2 r^2}{2} \sin^2 \theta \left(\frac{d\Phi}{ds} \right)^2 - 3P + \rho$$

On va dériver ce lagrangien par rapport à ds et cette dérivée sera notée prime '. Le lagrangien ne dépend pas explicitement du temps, il en dépend implicitement à travers a et ρ . Donc

$$\frac{d}{ds} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q'} = \frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q'} + \frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q'} \right) \frac{da}{ds} + \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q'} \right) \frac{d\rho}{ds}$$

$$\begin{aligned} \frac{da}{ds} &= \frac{\partial a}{\partial s} + \frac{\partial a}{\partial t} \frac{dt}{ds} \\ &= \dot{a} \frac{dt}{ds} \end{aligned}$$

$$\frac{d}{ds} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t'} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t'} = t'$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{ds} t' = 0 \Rightarrow \frac{dt}{ds} = k_1 \quad \text{avec} \quad k'_1 = 0$$

$$\frac{d}{ds} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r'} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r'} = -\frac{a^2}{1 - kr^2} \frac{dr}{ds}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r'} &= \frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r'} + \frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r'} \right) \frac{da}{ds} + \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r'} \right) \frac{d\rho}{ds} \\ &= -\frac{a^2}{1 - kr^2} \frac{d^2 r}{ds^2} - \frac{2a}{1 - kr^2} \frac{dr}{ds} \dot{a} k_1 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} = -\frac{a^2 kr}{(1 - kr^2)^2} \left(\frac{dr}{ds} \right)^2 - a^2 r \left(\frac{d\theta}{ds} \right)^2 - a^2 r \sin^2 \theta \left(\frac{d\Phi}{ds} \right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{a^2}{1 - kr^2} \frac{d^2 r}{ds^2} + \frac{2a}{1 - kr^2} \frac{dr}{ds} \dot{a} k_1 = \frac{a^2 kr}{(1 - kr^2)^2} \left(\frac{dr}{ds} \right)^2 + a^2 r \left(\frac{d\theta}{ds} \right)^2 + a^2 r \sin^2 \theta \left(\frac{d\Phi}{ds} \right)^2$$

$$\frac{d}{ds} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta'} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta'} = -a^2 r^2 \frac{d\theta}{ds}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta'} &= \frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta'} + \frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta'} \right) \frac{da}{ds} + \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta'} \right) \frac{d\rho}{ds} \\ &= -a^2 r^2 \frac{d^2 \theta}{ds^2} - 2ar^2 \frac{d\theta}{ds} \dot{a} k_1 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = -2a^2 r^2 \sin \theta \cos \theta \left(\frac{d\theta}{ds} \right)^2$$

$$\Rightarrow a^2 r^2 \frac{d^2 \theta}{ds^2} + 2ar^2 \frac{d\theta}{ds} \dot{a} k_1 = 2a^2 r^2 \sin \theta \cos \theta \left(\frac{d\theta}{ds} \right)^2$$

$$\frac{d}{ds} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi'} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi} = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi'} = -a^2 r^2 \sin^2 \theta \frac{d\Phi}{ds}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi} = 0$$

$$\Rightarrow a^2 r^2 \sin^2 \theta \frac{d\Phi}{ds} = k_2 \quad \text{avec} \quad k_2' = 0$$